

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ  
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟΥ ΙΙΙ – ΟΠΤΙΚΗ  
ΠΕΤΡΟΣ ΡΑΚΙΤΖΗΣ, ΘΕΟΔΩΡΟΣ ΤΖΟΥΡΟΣ  
**ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2015**

---

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

0. Αντί Προλόγου	2
1. Πείραμα 1: Μελέτη Λεπτών Φακών	3
2. Πείραμα 2: Μελέτη Διάθλασης Φωτός από Πρίσμα	16
3. Πείραμα 3: Συμβολόμετρο Fabry-Perot	28
4. Πείραμα 4: Πόλωση του φωτός	36
5. Πείραμα 5: Μελέτη οπτικής ενεργότητας – Πολωσίμετρο	57
6. Πείραμα 6: Μελέτη Περίθλασης Fraunhofer	61
7. Πείραμα 7: Μελέτη ιδιοτήτων οπτικού φράγματος	82
8. Πείραμα 8: Μελέτη ατομικών φασμάτων εκπομπής	90
9. Πείραμα 9: Μελέτη κυματικών φαινομένων με την χρήση μικροκυμάτων - Περίθλαση Fresnel	101
10. Πείραμα 10: Μέτρηση της ταχύτητας του φωτός	120

## ΑΝΤΙ ΠΡΟΛΟΓΟΥ

Οι σημειώσεις αποτελούν αναβάθμιση του βοηθήματος «Σημειώσεις Εργαστηρίου Φυσικής ΙΙΙ» έκδοση 2003, τις οποίες είχε επιμεληθεί η κ. Δέσποινα Χατζηδημητρίου (τόρα Αναπληρώτρια Καθηγήτρια στο Τμήμα Φυσικής του Παν. Αθηνών) και οι οποίες βασιζόταν σε παλαιότερες εκδόσεις του ίδιου οδηγού από τον κ. Ε. Ευθυμίου και κ. Δ. Χατζηδημητρίου καθώς και στις σημειώσεις «Οπτική Φασματομετρία» (επιμέλεια Δ. Καραμπουρνιώτη).

Στη βελτίωση της παρούσα έκδοσης συνεισέφεραν με σχόλιά ο Μπάμπης Μπαχαρίδης Τεχνικός Υπεύθυνος του Εργαστηρίου, καθώς και οι φοιτητές του Τμήματος Φυσικής: Χρόνης Σισμανίδης, Χαρά Τρουλινού, Νίκος Χριστινάκης, Ιωάννα Πετάση, Ηλίας Παπαβασιλείου, και Γεώργιος Χατζηδρόσος. Μέρος της μορφοποίησης του αρχικού κειμένου έγινε από τον Βασίλη Χαρμανδάρη, Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Φυσικής.

Ηράκλειο, 31 Ιουλίου 2014

Πέτρος Ρακιτζής και Θεόδωρος Τζούρος  
Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Κρήτης

## 1. ΜΕΛΕΤΗ ΛΕΠΤΩΝ ΦΑΚΩΝ

### 1. Σκοπός

- Εξοικείωση με βασικές αρχές γεωμετρικής οπτικής
- Μελέτη απλών οπτικών συστημάτων, χρησιμοποιώντας την παραξονική προσέγγιση
  - Μέτρηση εστιακής απόστασης λεπτού συγκεντρωτικού φακού
  - Μέτρηση εστιακής απόστασης λεπτού αποκεντρωτικού φακού
  - Μελέτη συστήματος δύο λεπτών φακών
- Παρατήρηση των χρωματικών σφαλμάτων των φακών

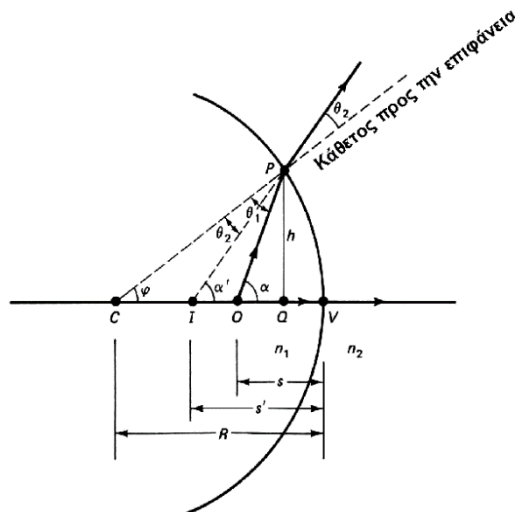
### 2. Θεωρία

#### Βασική προαπαιτούμενη γνώση

Serway, Physics for Scientists & Engineers, Τόμος ΙΙΙ, όλο το Κεφ. 36 (συμπεριλαμβανομένων των αντίστοιχων παραδειγμάτων και προβλημάτων).

#### 2.1 Διάθλαση από σφαιρική επιφάνεια

Έστω η κοίλη επιφάνεια του Σχήματος 1, που διαχωρίζει δύο μέσα με δείκτες διάθλασης  $n_1$  και  $n_2$ , αντίστοιχα.



**Σχήμα 1 :** Διάθλαση σε σφαιρική επιφάνεια με  $n_2 > n_1$ .

Στο σχήμα απεικονίζονται δύο ακτίνες που ξεκινούν από το σημειακό αντικείμενο  $O$ . Η μία ακτίνα είναι αξονική (δηλαδή περνά από το  $O$  και είναι κάθετη προς την σφαιρική επιφάνεια) και επομένως διαθλάται χωρίς να αλλάξει διεύθυνση. Η άλλη είναι μία τυχαία ακτίνα που προσπίπτει στην επιφάνεια σε σημείο  $P$ , και διαθλάται σύμφωνα με τον νόμο του Snell:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (1)$$

όπου  $n_1$  και  $n_2$  οι δείκτες διάθλασης του υλικού εσωτερικά και εξωτερικά του κάτοπτρου ενώ  $\theta_1$  και  $\theta_2$  οι γωνίες που σχηματίζουν οι αντίστοιχες ευθείες με την κάθετο της εφαπτομένης στο σημείο  $P$ . Οι δύο διαθλώμενες ακτίνες μοιάζουν να ξεκινούν από το σημείο τομής τους,  $I$  (σημειακό είδωλο). Στο τρίγωνο  $CPO$ , η εξωτερική γωνία  $\alpha = \theta_1 + \varphi$ . Στο τρίγωνο  $CPI$ , η εξωτερική γωνία  $\alpha' = \theta_2 + \varphi$ . Για παραξονικές ακτίνες, δηλαδή για ακτίνες που σχηματίζουν μικρή γωνία με τον άξονα, οι γωνίες  $\theta_1$  και  $\theta_2$  είναι μικρές, και επομένως η εξίσωση (1) μπορεί να γραφεί κατά προσέγγιση ως εξής:

$$n_1 (\alpha - \varphi) = n_2 (\alpha' - \varphi) \quad (2)$$

Επιπλέον, οι γωνίες  $\alpha$ ,  $\alpha'$  και  $\varphi$  μπορούν να αντικατασταθούν από τις εφαπτομένες τους (για μικρές γωνίες), σύμφωνα με το Σχήμα 1 και η απόσταση  $QV$  μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα (και πάλι για παραξονικές ακτίνες), οπότε προκύπτει ότι

$$n_1 \left( \frac{h}{s} - \frac{h}{R} \right) = n_2 \left( \frac{h}{s'} - \frac{h}{R} \right)$$

ή

$$\frac{n_1}{s} - \frac{n_2}{s'} = \frac{n_1 - n_2}{R} \quad (3)$$

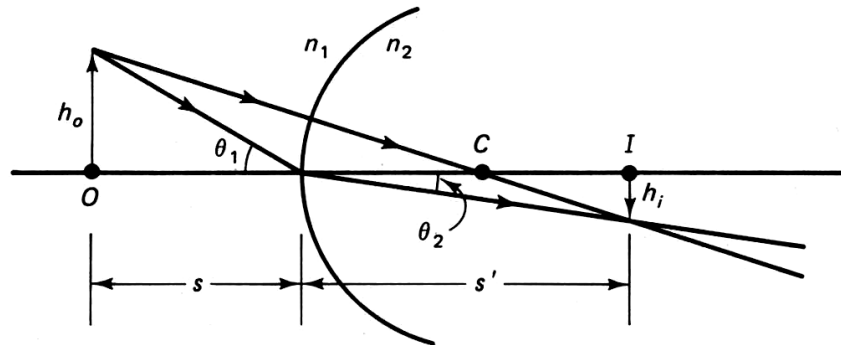
Θεωρώντας ως θετικές τις αποστάσεις για πραγματικά αντικείμενα και είδωλα\*, και ως αρνητικές τις αποστάσεις για φανταστικά αντικείμενα και είδωλα<sup>1</sup>, μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση (3), ως εξής

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad (4)$$

καθώς στην περίπτωση του Σχήματος 1,  $s > 0$ ,  $s' < 0$  και  $R < 0$ .

Η εξίσωση αυτή ισχύει και για κυρτές επιφάνειες, όπου  $R > 0$ . Για επίπεδες επιφάνειες, για τις οποίες θέτουμε  $R \rightarrow \infty$ , προκύπτει από την εξίσωση (4) ότι

$$s' = -\left(\frac{n_2}{n_1}\right)s$$



**Σχήμα 2:** Προσδιορισμός της κατακόρυφης μεγέθυνσης από σφαιρική διαθλαστική επιφάνεια.

Η κατακόρυφη μεγέθυνση ενός εκτεταμένου αντικείμενου βρίσκεται εύκολα από το Σχήμα 2. Ο νόμος του Snell απαιτεί, για μία ακτίνα που προσπίπτει στην κορυφή και για μικρές γωνίες, ότι  $n_1\theta_1 = n_2\theta_2$  ή, ισοδύναμα, χρησιμοποιώντας τις εφαπτομένες των γωνιών (για την προσέγγιση των παραξονικών ακτίνων),

$$n_1 \left( \frac{h_o}{s} \right) = n_2 \left( \frac{h_i}{s'} \right)$$

Επομένως, η κατακόρυφη μεγέθυνση δίνεται από την σχέση

<sup>1</sup> Φανταστικό είναι ένα αντικείμενο που βρίσκεται πίσω από τον φακό. Φανταστικό είναι ένα είδωλο που βρίσκεται μπροστά από τον φακό.

$$m = \frac{h_i}{h_o} = -\frac{n_1 s'}{n_2 s} \quad (5)$$

όπου το αρνητικό πρόσημο υποδεικνύει ότι το είδωλο είναι αντεστραμμένο.

### Παράδειγμα

Θα εξετάσουμε δύο παραδείγματα διάθλασης από σφαιρικές επιφάνειες, τα οποία παρουσιάζονται στο Σχήμα 3. Στο (α), ένα πραγματικό αντικείμενο είναι τοποθετημένο σε αέρα, σε απόσταση 30 cm από την κυρτή σφαιρική διαχωριστική επιφάνεια ακτίνας καμπυλότητας 5 cm. Προς τα δεξιά της επιφάνειας, υπάρχει νερό (δείκτης διάθλασης 1.33). Ο δείκτης διάθλασης του αέρα λαμβάνεται ως 1 στην περίπτωση αυτή.

Πριν από την σχεδίαση αντιπροσωπευτικών ακτίνων θα υπολογίσουμε την απόσταση και την κατακόρυφη μεγέθυνση του ειδώλου, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (4) και (5). Η εξ. (4) δίνει:

$$\frac{1}{30} + \frac{1.33}{s'} = \frac{1.33-1}{5} \Rightarrow s' = +40\text{cm}$$

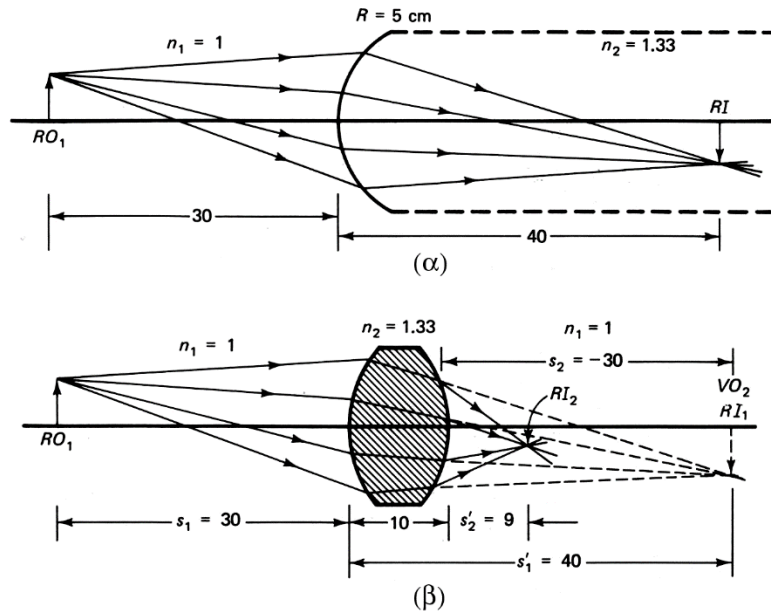
Το θετικό πρόσημο υποδεικνύει ότι το είδωλο είναι πραγματικό και επομένως βρίσκεται στα δεξιά της επιφάνειας.

Η εξίσωση (5) δίνει:

$$m = -\frac{(1)(+40)}{(1.33)(+30)} \Rightarrow m = -1$$

όπου το αρνητικό σημείο δείχνει ότι το είδωλο είναι αντεστραμμένο, και η μονάδα ότι το είδωλο έχει τις ίδιες διαστάσεις με το αντικείμενο.

Στο Σχήμα 3(α) φαίνεται η θέση του ειδώλου, όπως και διάφορες αντιπροσωπευτικές ακτίνες. Στο παράδειγμα αυτό έχουμε υποθέσει ότι το μέσο στα δεξιά της σφαιρικής επιφάνειας εκτείνεται σε τέτοιο βάθος ώστε το είδωλο να σχηματίζεται μέσα στο μέσο αυτό χωρίς να υπόκειται σε νέα διάθλαση. Ας υποθέσουμε τώρα (Σχήμα 3β) ότι το δεύτερο μέσο έχει πάχος μόλις 10 cm, σχηματίζοντας έτσι ένα παχύ φακό, με μια δεύτερη διαχωριστική επιφάνεια, κοίλη αυτή τη φορά, αλλά ίδιας (κατ' απόλυτη) καμπυλότητας με την πρώτη (R=5cm). Η διάθλαση από την πρώτη επιφάνεια προφανώς δεν επηρεάζεται από την ύπαρξη της δεύτερης επιφάνειας. Επομένως, μέσα στον φακό, οι ακτίνες κατευθύνονται όπως προηγουμένως, για να σχηματίσουν είδωλο σε απόσταση  $s' = 40$  cm από την πρώτη επιφάνεια. Αλλά, οι ακτίνες αυτές συναντούν την δεύτερη επιφάνεια και υπόκεινται σε δεύτερη διάθλαση εκεί, σχηματίζοντας τελικά διαφορετικό είδωλο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.



**Σχήμα 3 :** Παράδειγμα διάθλασης από σφαιρικές επιφάνειες. (α) Διάθλαση από μία σφαιρική επιφάνεια. (β) Διάθλαση από παχύ φακό. Οι δείκτες 1 και 2 αναφέρονται στη διάθλαση στην πρώτη και δεύτερη επιφάνεια αντίστοιχα.

Εφόσον η σύγκλιση των ακτίνων που προσπίπτουν στην δεύτερη επιφάνεια καθορίζεται από την θέση του πρώτου ειδώλου, η θέση του τελευταίου καθορίζει την απόσταση του αντικειμένου για την δεύτερη διάθλαση. Το πραγματικό είδωλο για την επιφάνεια (1) αποτελεί το *φανταστικό αντικείμενο*, όπως λέγεται, για την επιφάνεια (2). Σύμφωνα με την παραδοχή προσήμων που κάναμε προηγουμένως, η απόσταση αυτού του φανταστικού αντικειμένου πρέπει να έχει αρνητικό πρόσημο, όταν χρησιμοποιείται στις εξισώσεις (4) και (5). Έτσι για την δεύτερη διάθλαση έχουμε από την εξ. (4)

$$\frac{1.33}{-30} + \frac{1}{s'_2} = \frac{1-1.33}{-5} \Rightarrow s'_2 = +9 \text{ cm}$$

Η μεγέθυνση, σύμφωνα με την εξίσωση (5), είναι :

$$m = \frac{(-1.33)(+9)}{(1)(-30)} \Rightarrow m = +\frac{2}{5}$$

Δηλαδή, το ύψος του τελικού ειδώλου είναι τα  $2/5$  του ύψους του φανταστικού αντικειμένου, με τον ίδιο προσανατολισμό. Σε σχέση με το *αρχικό αντικείμενο*, το τελικό είδωλο είναι αντεστραμμένο, και με ύψος ίσο με τα  $2/5$  του ύψους του αρχικού αντικειμένου.

Γενικά, όποτε παρεμβαίνουν μία σειρά από ανακλαστικές και διαθλαστικές επιφάνειες στην διαδρομή των ακτίνων για την δημιουργία του τελικού ειδώλου, οι διάφορες ανακλάσεις και διαθλάσεις αναλύονται με την σειρά κατά την οποία το φως προσπίπτει σε αυτές. Η απόσταση του αντικειμένου για την ν-οστή διάθλαση / ανάκλαση, καθορίζεται από την απόσταση του ειδώλου της (ν-1) διάθλασης / ανάκλασης. Εάν το είδωλο του βήματος ν-1 δεν σχηματίζεται στην πραγματικότητα, λειτουργεί ως φανταστικό αντικείμενο για το βήμα ν.

## 2.2 Λεπτοί Φακοί

Θα εφαρμόσουμε τώρα την προηγούμενη μέθοδο για να αποδείξουμε τον τύπο των λεπτών φακών. Όπως και στο παράδειγμα του Σχήματος 3β, έχουμε δύο διαθλάσεις σε δύο σφαιρικές επιφάνειες. Η απλοποίηση

που κάνουμε είναι να θεωρήσουμε ότι το πάχος του φακού είναι αμελητέο σε σχέση με τις αποστάσεις του αντικειμένου και του ειδώλου. Η προσέγγιση αυτή είναι επαρκής για τις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές.

Στην πρώτη διαθλαστική επιφάνεια, ακτίνας  $R_1$ ,

$$\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_2}{s'_1} = \frac{n_2 - n_1}{R_1} \quad (6)$$

και στην δεύτερη διαθλαστική επιφάνεια, ακτίνας  $R_2$ ,

$$\frac{n_2}{s_2} + \frac{n_1}{s'_2} = \frac{n_1 - n_2}{R_2} \quad (7)$$

Έχουμε υποθέσει ότι και οι δύο πλευρές του φακού έρχονται σε επαφή με το ίδιο μέσο, με δείκτη διάθλασης  $n_1$ . Τώρα, η απόσταση του δεύτερου αντικειμένου δίνεται από την σχέση:

$$s_2 = t - s'_1 \quad (8)$$

όπου  $t$  είναι το πάχος του φακού.

Παρατηρήστε ότι η σχέση αυτή δίνει το σωστό πρόσημο για το  $s_2$  για περιπτώσεις όπως εκείνη του Σχήματος 3, αλλά και όταν το ενδιάμεσο είδωλο πέφτει μέσα στο φακό ή στα αριστερά του φακού. Στην προσέγγιση των λεπτών φακών, το  $t$  είναι αμελητέο, οπότε,

$$s_2 = -s'_1 \quad (9)$$

Εάν αντικαταστήσουμε αυτή την τιμή του  $s_2$  στην εξίσωση (7) και αθροίσουμε τις εξισώσεις (6) και (7), οι όροι  $n_2/s'_2$  απαλείφονται και προκύπτει ότι

$$\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_1}{s'_2} = (n_2 - n_1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Εφόσον  $s_1$  είναι η απόσταση του αρχικού αντικειμένου και  $s'_2$  τελική απόσταση του ειδώλου, μπορούμε να εγκαταλείψουμε τους δείκτες, οπότε,

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{(n_2 - n_1)}{n_1} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (10)$$

Ως *εστιακή απόσταση*,  $f$ , *λεπτού φακού* ορίζεται η απόσταση του ειδώλου, όταν το αντικείμενο βρίσκεται στο άπειρο, επομένως:

$$\frac{1}{f} = \frac{(n_2 - n_1)}{n_1} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (11)$$

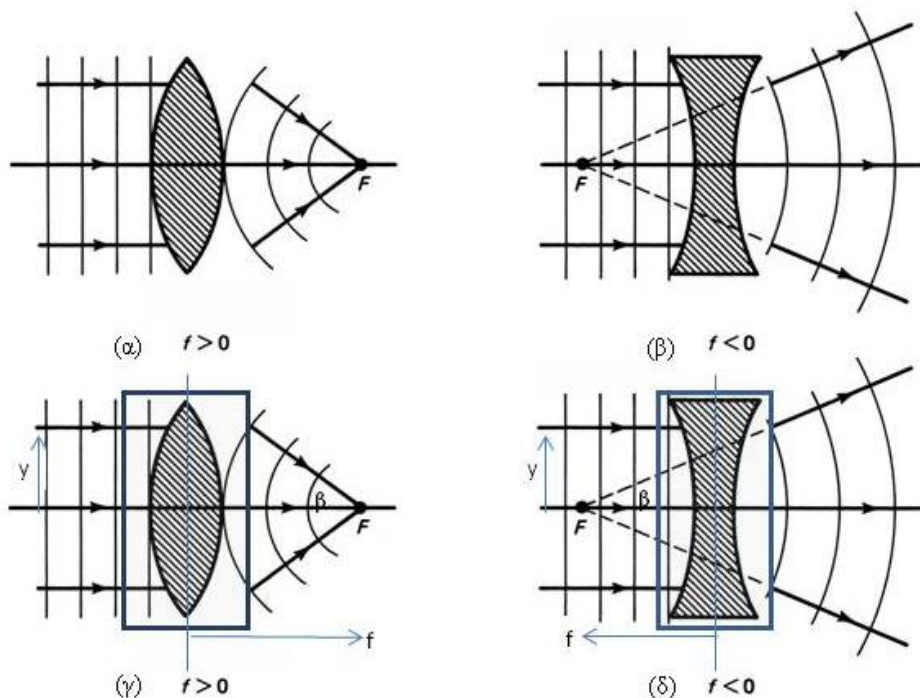
Η εξίσωση (11) αποτελεί τον *τύπο των κατασκευαστών των φακών*, που προβλέπει την τιμή της εστιακής απόστασης λεπτού φακού κατασκευασμένου από υλικό συγκεκριμένου δείκτη διάθλασης, με δεδομένες ακτίνες καμπυλότητας, που χρησιμοποιείται μέσα σε μέσο με δείκτη διάθλασης  $n_1$ . Στις περισσότερες περιπτώσεις το μέσο αυτό είναι ο αέρας, και υποθέτουμε  $n_1=1$ , που είναι ο δείκτης διάθλασης για το κενό.

Η εξίσωση λεπτών φακών, χρησιμοποιώντας τον ορισμό της εστιακής απόστασης, γίνεται

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \quad (12)$$

Η ανάλυση των κυματικών μετώπων, για επίπεδα κύματα (Σχήμα 4) δείχνει ότι ένας φακός παχύτερος στο μέσο από ότι στα άκρα του προκαλεί σύγκλιση, ενώ ένας φακός λεπτότερος στο μέσο προκαλεί απόκλιση

της προσπίπτουσας παράλληλης φωτεινής δέσμης. Το τμήμα του κυματικού μετώπου που περνά από το παχύτερο μέρος του φακού καθυστερεί σε σχέση με τα άλλα τμήματα. Οι συγκλίνοντες φακοί χαρακτηρίζονται από θετικές εστιακές αποστάσεις, ενώ οι αποκλίνοντες φακοί από αρνητικές, όπως φαίνεται στο σχήμα 4, με τα είδωλα να είναι πραγματικά και φανταστικά, αντίστοιχα. Επίσης, το  $s$  και το  $s'$  είναι θετικά αν το  $s$  είναι από τα αριστερά του φακού και το  $s'$  από την δεξιά αλλιώς είναι αρνητικά.



**Σχήμα 4:** Η επίδραση (α) ενός συγκλίνοντος φακού και (β) ενός αποκλίνοντος φακού σε επίπεδα κυματικά μέτωπα φωτός. (γ-δ) Γενίκευση της έννοιας του φακού: Εάν η γωνία εκτροπής της δέσμης  $\beta$  είναι ανάλογη του ύψους  $y$  με  $y = f \beta$  τότε το οπτικό στοιχείο (γκρίζο κουτί) που επιφέρει αυτή την εκτροπή στην δέσμη δρά ως φακός είτε η δέσμη είναι ηλεκτρομαγνητική (φως), είτε είναι σωματιδιακή (δέσμη επιταχυντή).

Παραδείγματα διαγραμμάτων ακτίνων για συγκλίνοντες και αποκλίνοντες φακούς δίνονται στο Σχήμα 5. Οι λεπτοί φακοί συμβολίζονται, συνήθως, σε διαγράμματα ακτίνων με ένα κατακόρυφο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα που υποδεικνύουν το γενικό σχήμα του φακού.

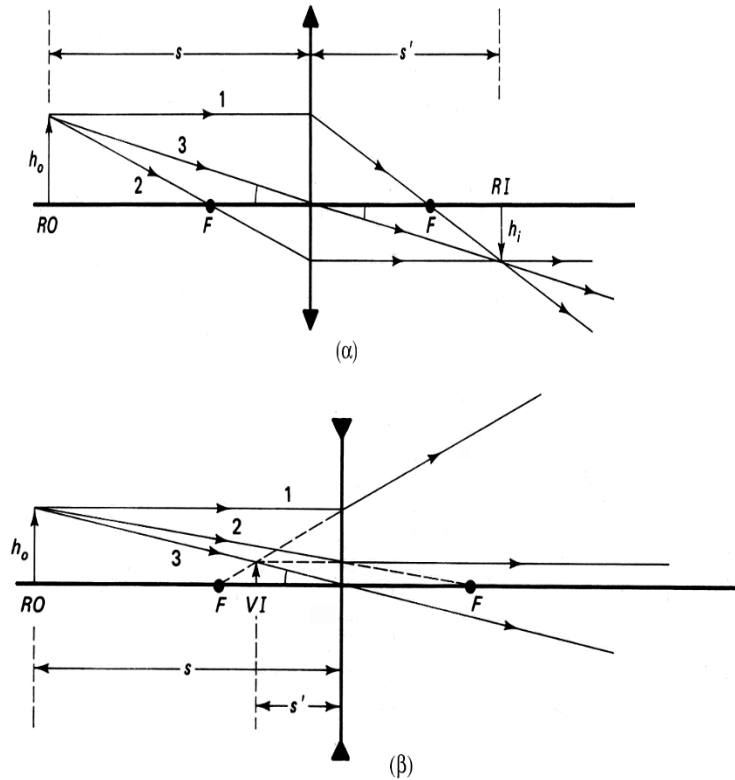
Η ακτίνα (1) από την κορυφή του αντικείμενου είναι παράλληλη προς τον άξονα, προσπίπτει στον φακό και συγκλίνει περνώντας από την εστία του φακού στην περίπτωση του συγκλίνοντος φακού (5α) ή αποκλίνει σαν να προέρχεται από την εστία στην περίπτωση του αποκλίνοντος φακού (5β). Η ακτίνα (2) είναι αντίστροφη της πρώτης. Αν και οι δύο αυτές ακτίνες είναι αρκετές για την εύρεση της θέσης του ειδώλου, μπορούμε να σχεδιάσουμε και μία τρίτη ακτίνα, που περνά από το κέντρο του φακού χωρίς απόκλιση. Το μέσον του φακού λειτουργεί σαν μία παράλληλη πλάκα, που δεν αλλάζει την κατεύθυνση της ακτίνας, και επειδή είναι λεπτή, προκαλεί αμελητέα μετατόπιση της.

Κατά τον σχεδιασμό των διαγραμμάτων των ακτίνων παρατηρούμε ότι εκτός από την κεντρική ακτίνα, κάθε ακτίνα που διαθλάται από συγκλίνοντα φακό κλίνει προς τον άξονα, ενώ στην περίπτωση του αποκλίνοντα φακού αποκλίνει. Και στις δύο περιπτώσεις, οι γωνίες υπό τις οποίες φαίνονται το αντικείμενο και το είδωλο, είναι ίσες μεταξύ τους. Επομένως, και για το πραγματικό είδωλο του (α) και για το φανταστικό είδωλο του (β) έχουμε ότι



$$\frac{h_0}{s} = \frac{h_i}{s'}$$

ενώ η κατακόρυφη μεγέθυνση δίνεται από την σχέση  $m = \frac{h_i}{h_0} = \frac{s'}{s}$ .



**Σχήμα 5:** Διαγράμματα ακτίνων για τον σχηματισμό ειδώλου (α) από συγκλίνοντα φακό και (β) από αποκλίνοντα φακό.

Σύμφωνα με την παραδοχή προσήμων που έχουμε κάνει, πρέπει να προσθέσουμε ένα αρνητικό πρόσημο στην έκφραση αυτή. Στην περίπτωση (α),  $s > 0$ ,  $s' > 0$  και  $m < 0$ , επειδή το είδωλο είναι αντεστραμμένο. Στην περίπτωση (β),  $s > 0$ ,  $s' < 0$  και  $m > 0$ . Έτσι και στις δύο περιπτώσεις,

$$m = -\frac{s'}{s} \tag{13}$$

Ένα ακόμα παράδειγμα διαγράμματος ακτίνων για την περίπτωση συστήματος δύο φακών φαίνεται στο Σχήμα 6.

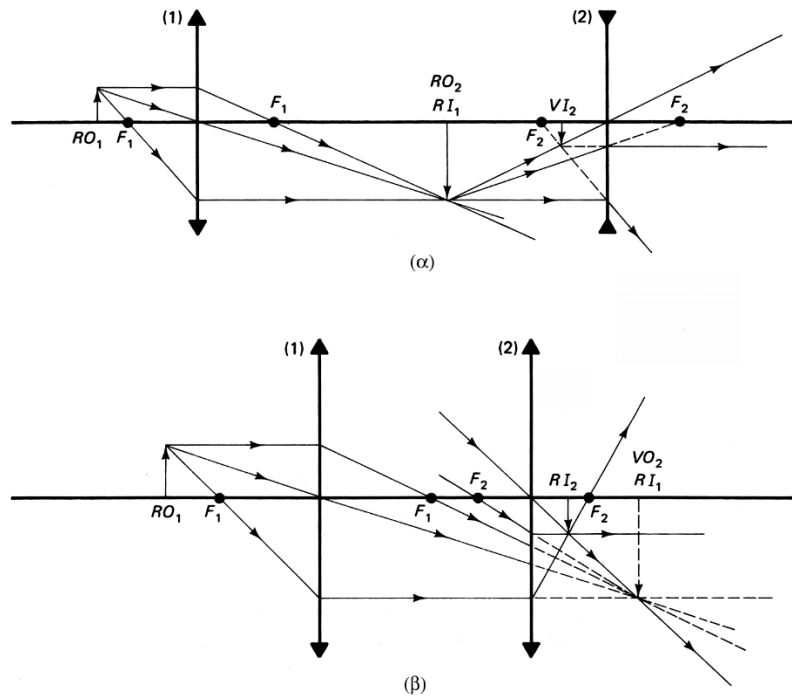
### Γενίκευση της έννοιας του φακού

Όπως φαίνεται από το Σχήμα 4(γ) και 4(δ) για έναν αποκλίνοντα ή συγκλίνοντα λεπτό φακό εστιακής απόστασης  $f$  ισχύει:

$$\beta \approx \tan \beta = y / f \quad \text{ή} \quad y = f \beta \tag{14}$$

Που ουσιαστικά μας λέει πως η γωνία εκτροπής  $\beta$  είναι ανάλογη του ύψους  $y$  από τον άξονα του φακού ή ότι το ύψος  $y$  είναι ανάλογο της γωνίας  $\beta$  με σταθερά αναλογίας την εστιακή απόσταση  $f$ .

Οποιαδήποτε διάταξη ηλεκτρομαγνητικής οπτικής (light optics) ή σωματιδιακής οπτικής (particle optics) που εκτρέπει μια δέσμη ηλεκτρομαγνητικής ή σωματιδιακής ακτινοβολίας σύμφωνα με την εξίσωση (14) μπορεί να θεωρηθεί σαν φακός και όλες οι σχέσεις που ξέρουμε για τους οπτικούς φακούς θα ισχύουν για μια τέτοια διάταξη. Η σχέση (14) λοιπόν μπορεί να θεωρηθεί σαν μια γενίκευση της βασικής ιδιότητας ενός φακού με εφαρμογή όχι μόνο σε δέσμες φωτός (ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία) αλλά και σε σωματιδιακές δέσμες όπως αυτές που χρησιμοποιούνται σε επιταχυντές.



**Σχήμα 6:** (α) Σχηματισμός φανταστικού ειδώλου από σύστημα δύο φακών, ενός συγκλίνοντος (1) και ενός αποκλίνοντος (2), (β) Σχηματισμός πραγματικού ειδώλου από σύστημα δύο συγκλινόντων φακών. Το ενδιάμεσο είδωλο RI1 παίζει τον ρόλο φανταστικού αντικείμενου VO2 για τον δεύτερο φακό. (RI=real image=πραγματικό είδωλο, VI=virtual image=φανταστικό είδωλο, RO=real object=πραγματικό αντικείμενο, VO=virtual object=Φανταστικό αντικείμενο).

### Παράδειγμα

Βρείτε και περιγράψτε τα ενδιάμεσα και τελικά είδωλα που προκύπτουν από το σύστημα φακών του σχήματος 6α. Έστω ότι  $f_1=15\text{ cm}$ ,  $f_2=15\text{ cm}$  και ότι η απόσταση μεταξύ των δύο φακών είναι  $60\text{ cm}$ . Έστω ότι το αντικείμενο βρίσκεται σε απόσταση  $25\text{ cm}$  από τον πρώτο φακό, όπως φαίνεται στο σχήμα.

**Λύση:** Ο πρώτος φακός είναι συγκλίνων:  $f_1=+15\text{ cm}$ ,  $s_1=+25\text{ cm}$ , οπότε:

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s'_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow s'_1 = \frac{s_1 f}{s_1 - f} = \frac{(25)(15)}{25 - 15} \Rightarrow s'_1 = +37.5\text{ cm}$$

και

$$m_1 = -\frac{s'_1}{s_1} = -\frac{37.5}{25} = -1.5$$

Έτσι το πρώτο είδωλο είναι πραγματικό (εφόσον το  $s'_1$  είναι θετικό),  $37.5\text{ cm}$  προς τα δεξιά του πρώτου φακού, και είναι 1.5 φορά ψηλότερο από το αντικείμενο.

Ο δεύτερος φακός είναι αποκλίνων:  $f_2 = -15$  cm. Εφόσον πραγματικές ακτίνες φεύγοντας από το πρώτο είδωλο αποκλίνουν, το είδωλο θα αποτελεί πραγματικό αντικείμενο για τον δεύτερο φακό, με  $s_2 = 60 - 37.5 = +22.5$  cm, προς τα αριστερά του φακού. Τότε,

$$s'_2 = \frac{s_2 f}{s_2 - f} = \frac{(22.5)(-15)}{22.5 - (-15)} \Rightarrow s'_2 = -9 \text{ cm}$$

και

$$m_2 = -\frac{s'_2}{s_2} = -\frac{-9}{22.5} = +0.4$$

Έτσι το τελικό είδωλο είναι φανταστικό (εφόσον το  $s'_2$  είναι αρνητικό), 9 cm προς τα αριστερά του δεύτερου φακού, ορθό ως προς το δικό του αντικείμενο (εφόσον το  $m$  είναι θετικό), και 0.4 φορές μικρότερο. Η συνολική μεγέθυνση είναι  $m = m_1 m_2 = (-1.5)(0.4) = -0.6$ . Έτσι, το τελικό είδωλο είναι αντεστραμμένο σε σχέση με το αρχικό αντικείμενο, και έχει ύψος ίσο προς τα 6/10 του ύψους του. Όλα αυτά τα στοιχεία φαίνονται ποιοτικά στο σχήμα 6α.

Πίνακας 1: Συνθήκη προσημού λεπτών φακών.

Ποσότητα	Θετική όταν	Αρνητική όταν
Θέση Αντικειμένου (s)	Αντικείμενο μπροστά από τον φακό (στα αριστερά του φακού)	Αντικείμενο πίσω από τον φακό (στα δεξιά του φακού)
Θέση Ειδώλου ( $s'$ )	Είδωλο πίσω από τον φακό (στα δεξιά του φακού)	Είδωλο μπροστά από τον φακό (στα αριστερά του φακού)
Υψος Ειδώλου ( $h'$ )	Είδωλο όρθιο (ίδια φορά με το αντικείμενο του)	Είδωλο ανάποδο (αντίθετη φορά από το αντικείμενο του)
$R_1$ και $R_2$	Κέντρο καμπυλότητας πίσω από τον φακό	Κέντρο καμπυλότητας μπροστά από τον φακό
Εστιακή απόσταση (f)	Συγκεντρωτικός φακός	Αποκεντρωτικός φακός

### 2.3 Σφάλματα φακών

*Γενικά:* Στην προηγούμενη ανάλυση ακολουθήσαμε την παραξονική προσέγγιση για την μελέτη σχηματισμού ειδώλου από μία διαθλαστική σφαιρική επιφάνεια. Μαθηματικά, η προσέγγιση αυτή σημαίνει ότι από τα αναπτύγματα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$$\sin x = \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right) \text{ και } \cos x = \left( 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right)$$

διατηρούνται μόνο οι πρώτοι όροι. Όταν ισχύει η προσέγγιση αυτή, η γεωμετρική οπτική προβλέπει σαφή είδωλα. Εάν συμπεριλάβουμε όρους μεγαλύτερης τάξης, τότε προκύπτουν αποκλίσεις από την «τέλεια» απεικόνιση, που ονομάζονται «σφάλματα». Όταν συμπεριληφθεί ο δεύτερος όρος του αναπτύγματος του  $\sin(x)$ , που περιέχει το  $x^3$ , τότε αναφερόμαστε στην θεωρία σφαλμάτων τρίτης τάξης, ή στα λεγόμενα σφάλματα Seidel. Για μονοχρωματική ακτινοβολία τα σφάλματα αυτά είναι: η σφαιρική εκτροπή, η κόμμη, ο αστιγματισμός, η καμπυλότητα πεδίου και η παραμόρφωση.

Η σφαιρική εκτροπή οφείλεται στο γεγονός ότι οι ακτίνες που προσπίπτουν στην κεντρική ζώνη ενός σφαιρικού φακού (ή κατόπτρου) εστιάζονται μακρύτερα από τις ακτίνες ίδιου μήκους κύματος που προσπίπτουν στις περιφερειακές ζώνες του φακού.

Η **κόμη** απαντάται σε φακούς οι οποίοι έχουν μεγάλα σφαιρικά σφάλματα, και παράγει ένα είδωλο (σημειακού αντικειμένου) σε σχήμα κομήτη.

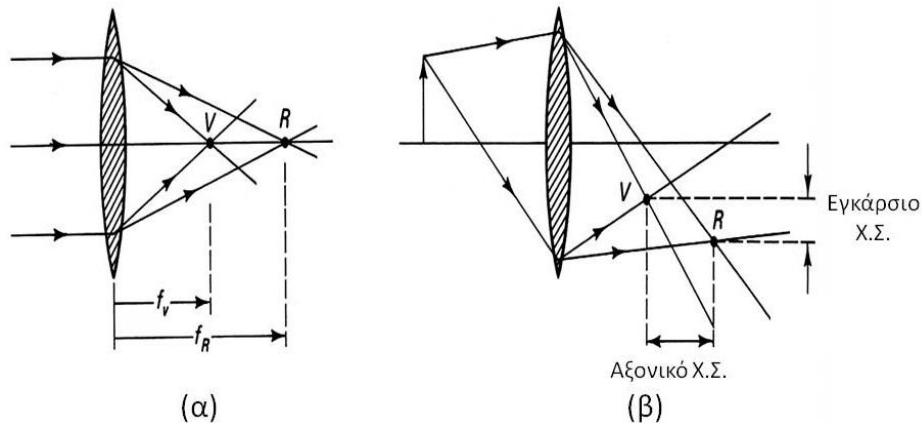
Ο **αστιγματισμός** παρατηρείται όταν οι ακτίνες ενός αντικειμένου σχηματίζουν **μεγάλη γωνία** με τον κύριο άξονα. Τότε οι ακτίνες δεν τέμνονται στην εστία αλλά διέρχονται από δύο ευθείες (εστιακές γραμμές).

Η **παραμόρφωση** απαντάται όταν το αντικείμενο έχει μεγάλες διαστάσεις και οφείλεται στο ότι η μεγέθυνση των σημείων μακριά από τον άξονα διαφέρει από την μεγέθυνση των σημείων κοντά στον άξονα. Λεπτομερέστερη ανάλυση των σφαλμάτων Seidel υπάρχει στην βιβλιογραφία που δίνεται στο τέλος του κεφαλαίου.

Ένα άλλο πολύ σημαντικό σφάλμα, που θα μελετήσετε στο πείραμά σας, είναι το λεγόμενο **χρωματικό σφάλμα** (ή **χρωματική εκτροπή**), που οφείλεται στην εξάρτηση των ιδιοτήτων απεικόνισης ενός οπτικού συστήματος από το μήκος κύματος του φωτός. Το χρωματικό σφάλμα ενός φακού περιγράφεται απλά στο Σχήμα 7α.

Εφόσον η εστιακή απόσταση  $f$  ενός φακού εξαρτάται από τον δείκτη διάθλασης του υλικού του φακού, θα εξαρτάται και από το μήκος κύματος. Στο σχήμα φαίνεται η εστίαση (από φακό) παράλληλης πολυχρωματικής δέσμης σε διαφορετικά εστιακά σημεία για το ερυθρό (R) και το ιώδες (V) άκρο του ορατού φάσματος. Εάν η προσπίπτουσα ακτινοβολία εμπεριέχει όλα τα μήκη κύματος του ορατού φάσματος, τα ενδιάμεσα χρώματα εστιάζονται μεταξύ αυτών των δύο σημείων πάνω στον άξονα. Όπως και στην περίπτωση του πρίσματος, (βλ. επόμενο κεφάλαιο) τα μικρότερα μήκη κύματος παθαίνουν μεγαλύτερη διάθλαση, και έτσι η εστία για το ιώδες βρίσκεται πλησιέστερα στον φακό (για συγκλίνοντα φακό). Στο Σχήμα 7β φαίνεται το αποτέλεσμα του χρωματικού σφάλματος στην απεικόνιση ενός σημειακού αντικειμένου εκτός άξονα. Σημειώνονται και το **αξονικό** και **εγκάρσιο** χρωματικό σφάλμα.

Το χρωματικό σφάλμα των αποκλινόντων φακών είναι αντίθετο από εκείνο των συγκλινόντων. Μπορούμε, επομένως, να μειώσουμε το αποτέλεσμα της χρωματικής εκτροπής, εάν χρησιμοποιήσουμε έναν συνδυασμό συγκλινόντος και αποκλινόντος φακού, οι οποίοι όμως πρέπει να είναι κατασκευασμένοι από διαφορετικά υλικά (βλ. άσκηση 4).



Σχήμα 7: Χρωματικό σφάλμα λεπτού φακού. Στο σχήμα φαίνεται η επίδραση του χρωματικού σφάλματος στην εστιακή απόσταση (α), και το εγκάρσιο και αξονικό χρωματικό σφάλμα (β) για κόκκινη (R) και ιώδη ακτινοβολία (V).

### Ασκήσεις θεωρίας:

#### 1. Μέθοδος μετατόπισης Bessel για την μέτρηση της εστιακής απόστασης φακού

Ένας φακός κινείται κατά μήκος του οπτικού άξονα, μεταξύ ακίνητου αντικειμένου και ακίνητης οθόνης παρατήρησης. Το αντικείμενο και η οθόνη απέχουν κατά  $L$  μεταξύ τους (με  $L > 4f$ , όπου  $f$  η εστιακή απόσταση του φακού). Υπάρχουν δύο θέσεις του φακού για τις οποίες έχουμε ευκρινές είδωλο στην οθόνη. Στην μία περίπτωση το είδωλο έχει υποστεί μεγέθυνση και στην άλλη σμίκρυνση. Εάν οι δύο αυτές θέσεις του φακού απέχουν μεταξύ τους κατά  $D$ , αποδείξτε ότι η εστιακή απόσταση του φακού δίνεται από την

σχέση  $f = (L^2 - D^2)/4L$ . Αυτή είναι η μέθοδος μετατόπισης Bessel για την μέτρηση της εστιακής απόστασης φακού. Τι γίνεται στην περίπτωση που  $L < 4f$ ; Δημιουργείται είδωλο και με τι μεγένθυση;

## 2. Μέθοδος Abbe για την μέτρηση της εστιακής απόστασης φακού

Το είδωλο του αντικειμένου σχηματίζεται πάνω στην οθόνη μέσω ενός φακού. Αφήνοντας τον φακό σταθερό, το αντικείμενο μετατοπίζεται σε μία διαφορετική θέση, και η οθόνη μετατοπίζεται μέχρις ότου να σχηματισθεί ξανά ευκρινές είδωλο. Εάν οι δύο θέσεις του αντικειμένου είναι  $S_1$  και  $S_2$  και εάν η κατακόρυφη μεγένθυση του ειδώλου είναι  $M_1$  και  $M_2$ , αντίστοιχα, αποδείξτε ότι η εστιακή απόσταση του φακού δίνεται απ τον τύπο

$$f = \frac{(S_2 - S_1)}{(1/M_1 - 1/M_2)}$$

Αυτή είναι η μέθοδος Abbe για την μέτρηση της εστιακής απόστασης φακού.

3. Αποδείξτε ότι η ελάχιστη απόσταση μεταξύ ενός αντικειμένου και του ειδώλου του που σχηματίζεται από λεπτό φακό είναι  $4f$ . Πότε συμβαίνει αυτό;

4. Υπολογίστε τις ακτίνες καμπυλότητας που πρέπει να έχουν δύο φακοί (κατασκευασμένοι από διαφορετικό υλικό) για να αποτελούν ένα *αχρωματικό ζεύγος* (achromatic doublet). Βλ. π.χ. F.L. Pedrotti & L.S. Pedrotti, *Introduction to Optics*, Prentice Hall International Editions, 1993, ch. 5.7.

5. Δείξτε ότι από την σχέση (14) εύκολα απορρέει η βασική εξίσωση των λεπτών φακών (12).

## 3. Περιγραφή της πειραματικής διάταξης

Για την μελέτη λεπτών φακών χρησιμοποιείται η διάταξη που φαίνεται στο Σχήμα 8.



**Σχήμα 8:** Πειραματική διάταξη περιλαμβάνει τον οπτικό διάδρομο στον οποίο στερεώνονται τα διάφορα οπτικά στοιχεία, φακούς, κάτοπτρο, οθόνη, λάμπα πυρακτώσεως και έγχρωμα φίλτρα.

Η πειραματική διάταξη περιλαμβάνει:

- Οπτικό διάδρομο για την τοποθέτηση των διαφόρων οπτικών στοιχείων
- Συγκεντρωτικούς και αποκεντρωτικούς λεπτούς φακούς διαφόρων εστιακών αποστάσεων, σε κατάλληλες βάσεις
- Οθόνη, με χαρτί μιλλιμετρέ, σε κατάλληλη βάση
- Επίπεδο κάτοπτρο (καθρέφτη) σε κατάλληλη βάση
- Έγχρωμα φίλτρα (μπλε, κόκκινο, πράσινο)

- Λαμπτήρα εκπομπής συνεχούς φάσματος σε κατάλληλη βάση
- Σχισμή μεταβλητού εύρους

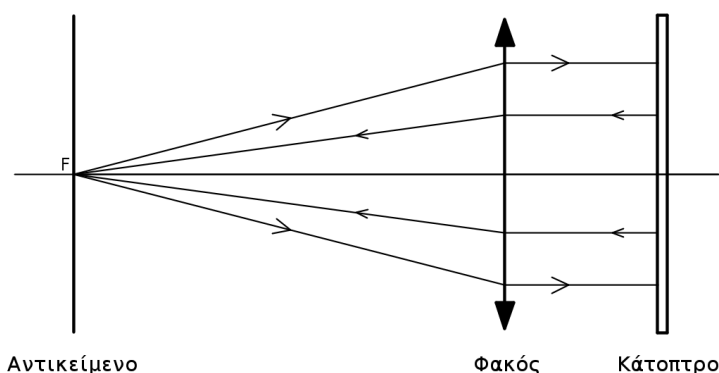
## 4. Εκτέλεση του πειράματος

### 4.1. Μέτρηση της εστιακής απόστασης λεπτού συγκεντρωτικού φακού

#### Με την μέθοδο της αυτοεστίασης

Τοποθετήστε τον φακό κάθετα προς την δέσμη της πηγής, έχοντας βεβαιωθεί ότι οι άξονες συμμετρίας της πηγής και του φακού συμπίπτουν. Στη συνέχεια τοποθετήστε ένα επίπεδο κάτοπτρο μετά τον φακό, ώστε να ανακλάται η δέσμη πίσω στο επίπεδο της πηγής. Μετατοπίστε τον φακό ή το αντικείμενο κατά μήκος του άξονα που συνδέει τα κέντρα των δύο οπτικών στοιχείων και της πηγής. Όταν σχηματιστεί ευκρινώς το είδωλο επάνω στο επίπεδο του αντικειμένου, μετρήστε την απόσταση φακού – αντικειμένου. Αυτή είναι η εστιακή απόσταση του παρόντος λεπτού φακού. **Εξηγήστε γιατί** (βλέπε σχήμα 9).

Υπολογίστε την εστιακή απόσταση  $f$  του φακού. Εκτιμήστε το σφάλμα της μέτρησής σας.



**Σχήμα 9:** Μέτρηση εστιακής απόστασης φακού με την μέθοδο της αυτοεστίασης

#### Με την χρήση του τύπου των κατασκευαστών των φακών

Μετακινήστε το φακό (ή το αντικείμενο) και προσδιορίστε την θέση της οθόνης για την οποία το είδωλο είναι ευκρινές. Μετρήστε τις αποστάσεις  $s=AS_1$  και  $s'=S_1A'$  (Σχήμα 10α). Υπολογίστε την αντίστοιχη τιμή του  $f$ . Επαναλάβετε την μέτρηση αρκετές φορές. Υπολογίστε την μέση τιμή του  $f$  και το αντίστοιχο τυπικό σφάλμα.

#### Με την μέθοδο της μετατόπισης (μέθοδος Bessel)

Υπολογίστε την εστιακή απόσταση  $f$  (και εκτιμήστε το αντίστοιχο σφάλμα) ενός συγκεντρωτικού φακού χρησιμοποιώντας την μέθοδο Bessel (βλ. άσκηση 1 της θεωρίας).

#### Με την μέθοδο Abbe

Υπολογίστε την εστιακή απόσταση  $f$  (και εκτιμήστε το αντίστοιχο σφάλμα) ενός συγκεντρωτικού φακού χρησιμοποιώντας την μέθοδο Abbe (βλ. άσκηση 2 της θεωρίας).

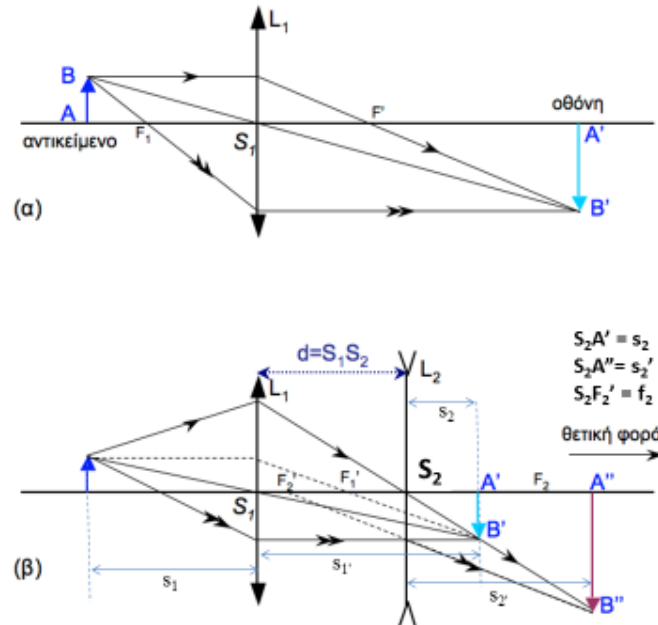
Συγκρίνατε τα αποτελέσματα και των 4 διαφορετικών μεθόδων και σχολιάστε τυχόν διαφορές στην τιμή και την ακρίβεια τους

### 4.2 Μέτρηση της εστιακής απόστασης ενός λεπτού αποκεντρωτικού φακού

- Βλέπε το Σχήμα 10β
- Η μέτρηση αυτή θα γίνει με βάση τον τύπο των λεπτών φακών και την χρήση ενός βοηθητικού φακού. Όπως είναι γνωστό από την θεωρία, ένας αποκεντρωτικός φακός δεν δίνει πραγματικό είδωλο ενός πραγματικού αντικειμένου. Γι' αυτό θα χρησιμοποιηθεί ένας βοηθητικός φακός, ο οποίος θα παρέχει φανταστικό αντικείμενο στον αποκλίνοντα φακό οπότε το τελικό είδωλο θα είναι πραγματικό. Προσέξτε στο σχήμα ότι το είδωλο του βοηθητικού συγκεντρωτικού φακού παίζει πράγματι τον ρόλο του αντικειμένου για τον αποκεντρωτικό που μελετάτε.
- Αρχικά τοποθετήστε και ευθυγραμμίστε τον συγκεντρωτικό φακό  $L_1$ . Τοποθετήστε την οθόνη σε κατάλληλη θέση ( $A'$ ) ώστε να σχηματιστεί σ' αυτή ευκρινές είδωλο. Μεταξύ του  $L_1$  και της οθόνης τοποθετήστε, σε τυχαία θέση, τον αποκεντρωτικό φακό  $L_2$ . Πριν μετακινήσετε την οθόνη, μετρήστε

την απόσταση  $L_2$  – οθόνης. Αυτό είναι το  $s_2$ . Μετακινήστε τώρα την οθόνη μέχρι να πάρετε καθαρή εικόνα ( $A''$ ). Η απόσταση  $L_2$  – οθόνης είναι το  $s_2'$ . Μετρήστε την.

- Προσέξτε τα πρόσημα των  $s_2$  και  $s_2'$  (απόσταση αντικειμένου από τον αποκλίνοντα φακό και απόσταση ειδώλου από τον αποκλίνοντα φακό, αντίστοιχα). Είναι και τα 2 θετικά;
- Υπολογίστε την εστιακή απόσταση,  $f_2$ , του αποκεντρωτικού φακού.
- Επαναλάβετε τη διαδικασία αρκετές φορές, μεταβάλλοντας π.χ. την θέση του βοηθητικού φακού, και υπολογίστε σε κάθε περίπτωση την  $f_2$ .
- Υπολογίστε την μέση τιμή των  $f_2$  και το αντίστοιχο σφάλμα μέσης τιμής.
- Σκεφθείτε πώς θα μπορούσατε να μετρήσετε την εστιακή απόσταση του αποκλίνοντος φακού χωρίς την χρήση βοηθητικού φακού. Κάνετε τις απαραίτητες μετρήσεις και προσδιορίστε την εστιακή απόσταση του αποκλίνοντα φακού καθώς και το αντίστοιχο σφάλμα  $\Delta f_2$ .



**Σχήμα 10:** Διαγράμματα μέτρησης εστιακής απόστασης: (α) ενός συγκεντρωτικού φακού και (β) ενός αποκεντρωτικού φακού. Τα  $f_1$  ( $S_1F_1'$ ),  $s_1$ ,  $s_1'$ ,  $s_2'$  είναι θετικά, ενώ  $f_2$  ( $S_1F_2'$ ) και  $s_2$  είναι αρνητικά.

### 4.3 Σύστημα φακών $L_1+L_2$

- Τοποθετήστε δύο λεπτούς φακούς  $L_1$  και  $L_2$  σε απόσταση  $d > f_1+f_2$  μεταξύ τους (σχήμα 6β).
- Με την βοήθεια μίας οθόνης προσδιορίστε την θέση όπου εμφανίζεται ευκρινές είδωλο. Εκτιμήστε το σφάλμα της μέτρησής σας
- Μετρήστε το μέγεθος του ειδώλου της σχισμής (η οποία είναι το αντικείμενό σας). Εκτιμήστε το σφάλμα της μέτρησής σας
- Υπολογίστε την θέση του ειδώλου και την μεγέθυνσή του, ακολουθώντας την μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στην θεωρία (παρ. 2.2). Συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας με τις μετρήσεις σας.

### 4.4 Χρωματικά σφάλματα φακού

- Από το πρώτο μέρος του πειράματος, επιλέξτε την μέθοδο που θεωρείτε την πλέον ακριβή
- Μετρήστε την θέση της εστίας λεπτού φακού, όταν τοποθετήσετε μπροστά από την πηγή σας είτε ένα μπλε ( $B=Blue$ ), είτε ένα κόκκινο ( $R=Red$ ) φίλτρο.
- Υπολογίστε την διαφορά  $f_R - f_B$  και εκτιμήστε την ακρίβεια των μετρήσεών σας.
- Προτείνετε τρόπους με τους οποίους θα μπορούσατε να βελτιώσετε την ακρίβεια της συγκεκριμένης μέτρησης.
- Προτείνετε έναν τρόπο με τον οποίο θα μπορούσε να ελαχιστοποιηθεί το χρωματικό σφάλμα.

### 4.5 Άσκηση



Φτιάξτε μία παράλληλη δέσμη φωτός. Σκεφτείτε πώς μπορείτε να ελαττώσετε στο μισό την διάμετρο της δέσμης αυτής. Κάνετε την κατάλληλη διάταξη. Ελέγξτε ότι επιτύχατε το ζητούμενο.

### **Βιβλιογραφία**

- R.A. Serway, Physics for scientists and engineers, Τόμος ΙΙΙ, κεφ. 36
- F.L. Pedrotti & L.S. Pedrotti, Introduction to Optics, Prentice Hall International Editions, 1993, ch. 3
- E. Hecht, Optics, Addison-Wesley Publishing Company, 1987, ch. 5.2.2, 5.2.3, 6.3.2
- Feynman, Lectures on Physics, κεφ. 27-6 (τόμος Ι)
- Halliday-Resnick, Φυσική, τομ. ΙΙ, παράγραφοι 42.4, 42.5
- Μαθήματα Φυσικής Πανεπιστημίου Berkeley, τομ. 3 (Κυματική), παράγραφος 9.7



## 2. ΜΕΛΕΤΗ ΔΙΑΘΛΑΣΗΣ ΦΩΤΟΣ ΑΠΟ ΠΡΙΣΜΑ

### 1. Σκοπός

- Μελέτη ιδιοτήτων πρίσματος
- Μελέτη της μεταβολής του δείκτη διάθλασης συναρτήσει του μήκους κύματος.
- Προσδιορισμός διασκεδαστικής ικανότητας πρίσματος.

### 2. Θεωρία

#### Βασική προαπαιτούμενη γνώση

Serway, Physics for Scientists & Engineers, Τόμος ΙΙΙ, Κεφ. 35.3, 35.4, 35.5, 35.6, 35.7, 35.8 (συμπεριλαμβανομένων των αντίστοιχων παραδειγμάτων και προβλημάτων).

#### 2.1 Δείκτης Διάθλασης – Νόμος του Snell – Διασπορά

Η ταχύτητα διάδοσης του φωτός σε ένα μέσο διαφέρει από υλικό σε υλικό. Ορίζουμε ως *δείκτη διάθλασης*,  $n$ , τον λόγο του μέτρου της ταχύτητας του φωτός στο κενό προς το μέτρο της ταχύτητας του φωτός στο μέσο.

Όταν μονοχρωματικό φως περνά από την διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ δύο διαφανών ιστροπικών μέσων σε σταθερή θερμοκρασία, τότε ένα μέρος της αρχικής ακτίνας ανακλάται και ένα άλλο μέρος *διαθλάται* μέσα στο δεύτερο μέσο. Η *διαθλώμενη* ακτίνα δεν συνεχίζει την πορεία της προσπίπτουσας ακτίνας (που σχηματίζει γωνία  $i$  με την κάθετο στην διαχωριστική επιφάνεια των δύο μέσων), αλλά σχηματίζει γωνία  $r$  με την κάθετο στην διαχωριστική επιφάνεια των δύο μέσων. Σύμφωνα με τον *νόμο του Snell*, ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_r \quad (1)$$

όπου  $n_1, n_2$  οι δείκτες διάθλασης, χαρακτηριστικοί των δύο μέσων.

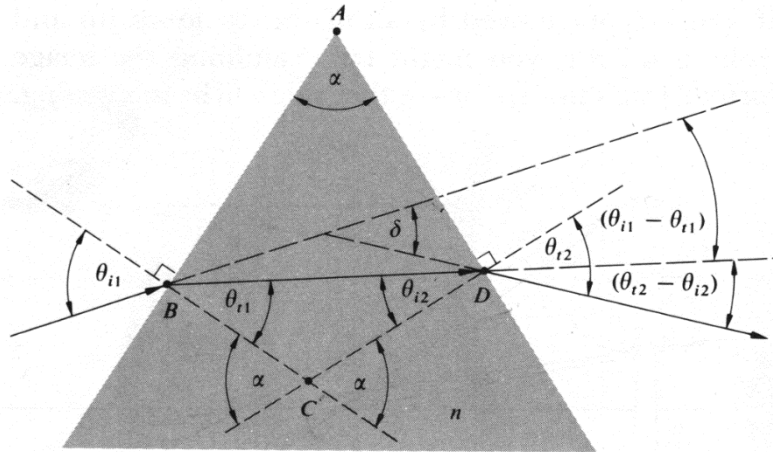
Ο δείκτης διάθλασης εξαρτάται από το μήκος κύματος,  $\lambda$ , του προσπίπτοντος φωτός, και είναι πραγματικός αριθμός, για τις φασματικές περιοχές μακριά από τις περιοχές απορρόφησης του υλικού. Το φαινόμενο της εξάρτησης του  $n$  από το  $\lambda$  λέγεται *διασπορά* ή *διασκεδασμός*.

#### 2.2 Πρίσματα Διασποράς

Τα πρίσματα έχουν πολλούς διαφορετικούς ρόλους στην Οπτική. Υπάρχουν π.χ. συνδυασμοί πρισμάτων που χρησιμεύουν ως διαχωριστές δέσμης (beam-splitters), ως πολωτικές συσκευές, και ως συμβολόμετρα. Συνήθως όμως τα πρίσματα χρησιμοποιούνται είτε ως στοιχεία διασποράς σε φασματοσκόπια, είτε για να αλλάξουν τον προσανατολισμό μιας εικόνας ή την διεύθυνση διάδοσης μιας φωτεινής δέσμης. Εδώ θα μελετήσουμε τη χρήση πρισμάτων διασποράς, δηλ. πρισμάτων που προκαλούν ανάλυση του προσπίπτοντος φωτός.

#### Γωνία εκτροπής, γωνία ελάχιστης εκτροπής

Έστω μονοχρωματική φωτεινή ακτίνα μήκους κύματος  $\lambda$  που προσπίπτει σε πρίσμα διασποράς υπό γωνία  $\theta_{i1}$  (βλ. Σχήμα 1).



**Σχήμα 1 :** Γεωμετρία πρίσματος διασποράς

Η φωτεινή ακτίνα εξέρχεται από το πρίσμα σχηματίζοντας “γωνία απόκλισης”,  $\delta$ , με την αρχική κατεύθυνση. Στην πρώτη διαχωριστική επιφάνεια συμβαίνει διάθλαση και η ακτίνα εκτρέπεται κατά γωνία  $\theta_{i1} - \theta_{r1}$  και στην δεύτερη διαχωριστική επιφάνεια, η ακτίνα εκτρέπεται κατά  $\theta_{i2} - \theta_{r2}$ . Συνολικά η **γωνιακή απόκλιση ή εκτροπή** είναι

$$\delta = (\theta_{i1} - \theta_{r1}) + (\theta_{i2} - \theta_{r2}) \quad (2)$$

Εφόσον το πολύγωνο ABCD περιέχει δύο ορθές γωνίες, η γωνία BCD πρέπει να είναι παραπληρωματική της διαθλαστικής γωνίας,  $\alpha$ , του πρίσματος. Ως εξωτερική γωνία του τριγώνου BCD, η γωνία  $\alpha$  είναι επίσης ίση με το άθροισμα των απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου, δηλ.

$$\alpha = \theta_{r1} + \theta_{r2} \quad (3)$$

Συνεπώς

$$\delta = \theta_{i1} + \theta_{i2} - \alpha \quad (4)$$

Αν ο δείκτης διάθλασης του πρίσματος είναι  $n$  και το πρίσμα βρίσκεται στον αέρα  $n_a \approx 1$ , τότε, από τον Νόμο του Snell (στην 2η διαχωριστική επιφάνεια) προκύπτει ότι

$$\sin \theta_{i2} = n \sin \theta_{r2} = n \sin (\alpha - \theta_{r1}) = n (\sin \alpha \cos \theta_{r1} - \cos \alpha \sin \theta_{r1}) \quad (5\alpha)$$

Εφαρμόζοντας τον Νόμο του Snell στην πρώτη διαχωριστική επιφάνεια δηλαδή

$$\sin \theta_{i1} = n \sin \theta_{r1} \quad (5\beta)$$

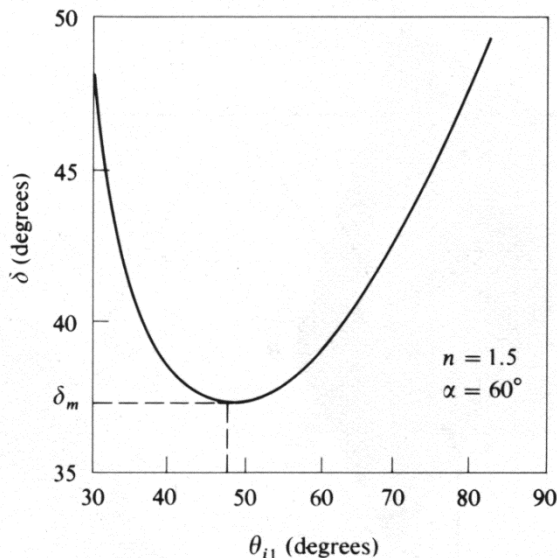
Και αντικαθιστώντας το  $\cos \theta_{r1}$  με  $(1 - \sin^2 \theta_{r1})^{1/2}$  και το  $\sin \theta_{r1}$  από την (5β) στην (5α) και λύνοντας ως προς  $\theta_{i2}$  έχουμε

$$\theta_{i2} = \sin^{-1} \left[ \sin \alpha \left( n^2 - \sin^2 \theta_{i1} \right)^{1/2} - \cos \alpha \sin \theta_{i1} \right] \quad (6)$$

Τότε, σύμφωνα με την (4) η γωνιακή εκτροπή  $\delta$  δίνεται σαν συνάρτηση της γωνίας πρόσπτωσης  $\theta_{i1}$  από τον τύπο:

$$\delta = \delta(\theta_{i1}) = \theta_{i1} + \sin^{-1} \left[ \sin \alpha \left( n^2 - \sin^2 \theta_{i1} \right)^{1/2} - \cos \alpha \sin \theta_{i1} \right] - \alpha \quad (7)$$

Προφανώς η  $\delta$  αυξάνεται αυξανόμενου του  $n$ , που με τη σειρά του είναι συνάρτηση του μήκους κύματος, συνεπώς μπορούμε να γράψουμε την γωνία εκτροπής ως  $\delta(n)$  ή  $\delta(\lambda)$ . Στα περισσότερα διαφανή διηλεκτρικά υλικά που έχουν πρακτική εφαρμογή, το  $n(\lambda)$  ελαττώνεται αυξανόμενου του μήκους κύματος στην ορατή περιοχή του οπτικού φάσματος. Συνεπώς, η γωνιακή εκτροπή θα είναι μικρότερη για το κόκκινο φως, απ' ό,τι είναι για το ιώδες. Για μονοχρωματική ακτινοβολία (δεδομένο  $\lambda$ ) και δεδομένο πρίσμα (δεδομένα  $n$  και  $\alpha$ ) η γωνιακή εκτροπή εξαρτάται μόνο από την γωνία πρόσπτωσης  $\theta_{i1}$ . Στο Σχήμα 2 φαίνεται η εξάρτηση της  $\delta$  από την γωνία πρόσπτωσης για ένα συνηθισμένο πρίσμα υάλου.



**Σχήμα 2:** Γωνιακή εκτροπή συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης

Η ελάχιστη δυνατή τιμή της γωνιακής εκτροπής έχει ιδιαίτερη σημασία για πρακτικούς σκοπούς. Η τιμή της μπορεί να βρεθεί είτε παραγωγίζοντας στη σχέση (7) το  $\delta$  ως προς  $\theta_{i1}$ , και θέτοντας  $d\delta/d\theta_{i1} = 0$ , είτε ακολουθώντας την εξής απλούστερη μέθοδο:

Παραγωγίζοντας την σχέση (4) ως προς  $\theta_{i1}$  και απαιτώντας  $d\delta/d\theta_{i1} = 0$ , παίρνουμε

$$\frac{d\delta}{d\theta_{i1}} = 1 + \frac{d\theta_{t2}}{d\theta_{i1}} = 0 \Rightarrow \frac{d\theta_{t2}}{d\theta_{i1}} = -1$$

Εν συνεχεία, παραγωγίζουμε τον νόμο Snell σε κάθε διαχωριστική επιφάνεια και παίρνουμε

$$\cos \theta_{i1} d\theta_{i1} = n \cos \theta_{t1} d\theta_{t1}$$

$$\cos \theta_{t2} d\theta_{t2} = n \cos \theta_{i2} d\theta_{i2}$$

Διαφορίζοντας τώρα την εξ. (3) για σταθερό  $\alpha$ , προκύπτει ότι  $d\theta_{t1} = -d\theta_{i2}$ . Από τα παραπάνω συνεπάγεται (διαιρώντας κατά μέλη) ότι

$$\frac{\cos \theta_{i1}}{\cos \theta_{t2}} = \frac{\cos \theta_{t1}}{\cos \theta_{i2}}$$

Χρησιμοποιώντας και πάλι τον νόμο του Snell, μπορούμε να ξαναγράψουμε την παραπάνω σχέση ως

$$\frac{1 - \sin^2 \theta_{i1}}{1 - \sin^2 \theta_{i2}} = \frac{n^2 - \sin^2 \theta_{i1}}{n^2 - \sin^2 \theta_{i2}}$$

Αυτή η σχέση ισχύει για την τιμή της γωνίας πρόσπτωσης για την οποία  $d\delta/d\theta_{i1} = 0$ . Εφόσον  $n \neq 1$ , συμπεραίνουμε ότι  $\theta_{i1} = \theta_{i2}$ , και επομένως  $\theta_{i1} = \theta_{i2}$ .

Αυτό σημαίνει ότι μια ακτίνα εκτρέπεται το ελάχιστο δυνατό ( $\delta_m$ ), όταν η ακτίνα μέσα στο πρίσμα είναι παράλληλη προς την βάση του. Από τα παραπάνω, είναι προφανές ότι όταν  $\delta = \delta_m$ ,  $\theta_{i1} = (\delta_m + \alpha)/2$  και  $\theta_{t1} = \alpha/2$ , οπότε από τον νόμο του Snell στην πρώτη διαχωριστική επιφάνεια προκύπτει ότι

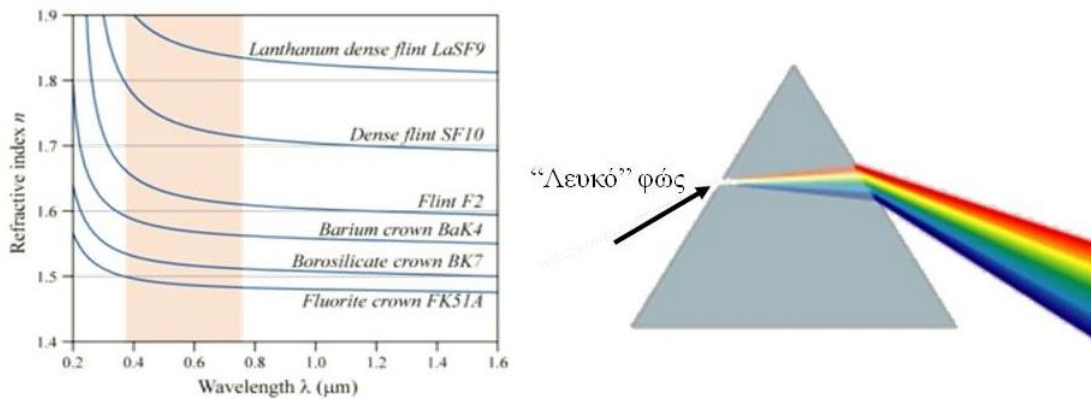
$$n = \sin\left(\frac{\delta_m + \alpha}{2}\right) / \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (8)$$

Αυτή η εξίσωση αποτελεί τη βάση μιας από τις πλέον ακριβείς τεχνικές προσδιορισμού του συντελεστή διάθλασης διαφανούς υλικού. Αυτή την τεχνική θα χρησιμοποιήσουμε στο πείραμα που ακολουθεί.

### Διασπορά - Σχέση Cauchy

Η ελάχιστη εκτροπή μονοχρωματικής δέσμης κατά τη διέλευσή της από πρίσμα δίνεται από τη σχέση (8), ως συνάρτηση του δείκτη διάθλασης  $n$ . Ο δείκτης διάθλασης ωστόσο, εξαρτάται από το μήκος κύματος ( $n_\lambda$ ), συνεπώς η εκτροπή είναι και αυτή συνάρτηση του μήκους κύματος.

Στο Σχήμα 3 παρουσιάζονται μερικές τυπικές “ομαλές” καμπύλες διασποράς για διάφορα είδη γυαλιού, και ο συνεπαγόμενος διαχωρισμός χρωμάτων.



**Σχήμα 3:** Παραδείγματα ομαλής καμπύλης διασποράς και ο συνεπαγόμενος διαχωρισμός μηκών κύματος λευκού φωτός που περνά από το πρίσμα.

Συγκρίνοντας το Σχήμα 3 και Σχήμα 1, παρατηρήστε ότι στα μικρότερα μήκη κύματος αντιστοιχούν μεγαλύτεροι δείκτες διάθλασης του υλικού και συνεπώς μικρότερες ταχύτητες διάδοσης στο πρίσμα.

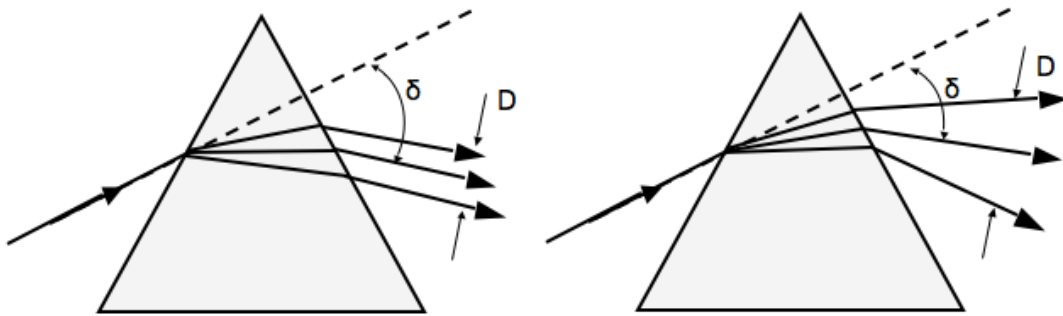
Η καμπύλες διασποράς που δίνονται στο Σχήμα 3 ονομάζονται «ομαλές». Όταν το διαφανές μέσο έχει χαρακτηριστικές διεγέρσεις που απορροφούν φωτόνια σε μήκη κύματος εντός της περιοχής μηκών κύματος της καμπύλης διασποράς, τότε η καμπύλη είναι και πάλι μονοτονικά φθίνουσα όπως φαίνεται στο σχήμα, αλλά αλλάζει μορφή (αποκτά θετική κλίση) στην περιοχή της απορρόφησης. Όταν συμβαίνει αυτό χρησιμοποιείται ο όρος «ανώμαλη διασπορά». Στην περιοχή απορρόφησης, ο δείκτης διάθλασης περιγράφεται από μιγαδικό αριθμό, του οποίου το πραγματικό μέρος αντιστοιχεί στο γνωστό δείκτη διάθλασης και το φανταστικό χαρακτηρίζει την απορρόφηση ακτινοβολίας από το υλικό. Η ομαλή καμπύλη διασποράς που φαίνεται στο σχήμα είναι τυπική, αν και διαφοροποιείται κάπως από υλικό σε υλικό. Υπάρχει μια εμπειρική σχέση που προσεγγίζει την καμπύλη αυτή, η σχέση Cauchy:

$$n_{\lambda} = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \dots \quad (9)$$

όπου A, B, C, ... είναι εμπειρικές σταθερές που προσδιορίζονται από τα πειραματικά δεδομένα για ένα συγκεκριμένο υλικό. Συνήθως χρησιμοποιούνται μόνο οι δύο πρώτοι όροι του αναπτύγματος. Τότε, η διασπορά (D), που ορίζεται ως  $dn/d\lambda$ , δίνεται κατά προσέγγιση, από τη σχέση

$$D = \frac{dn_{\lambda}}{d\lambda} = -\frac{2B}{\lambda^3} \quad (10)$$

Είναι σημαντικό να κατανοήσουμε την διαφορά μεταξύ διασποράς και εκτροπής. Μπορεί πρίσμα από υλικό με μεγάλο  $n$  να προκαλέσει μεγάλη εκτροπή σε δεδομένο μήκος κύματος, χωρίς ο διαχωρισμός μεταξύ γειτονικών μηκών κύματος να είναι μεγάλος (βλ. Σχήμα 4).



**Σχήμα 4:** Οριακές περιπτώσεις μεγάλης γωνιακής εκτροπής  $\delta$  (της ενδιάμεσης γραμμής) και μικρής διασποράς D (αριστερό σχήμα), και μικρής γωνιακής εκτροπής  $\delta$  και μεγάλης διασποράς D (δεξιό σχήμα).

Ιστορικά, συνηθίζεται να χαρακτηρίζουμε τη διασπορά χρησιμοποιώντας τρία μήκη κύματος, στο μέσο και στις άκρες του ορατού φάσματος, τις λεγόμενες γραμμές Fraunhofer οι οποίες αντιστοιχούν σε εκπομπή φωτονίων λόγω συγκεκριμένων μεταπτώσεων ηλεκτρονίων στο άτομο του υδρογόνου και αζώτου. Αυτές βρίσκονται σε μήκη κύματος  $\lambda_F=484.1\text{nm}$ ,  $\lambda_C=656.3\text{nm}$ , και  $\lambda_D=589.3\text{nm}$ , και αντιστοιχούν στις γραμμές  $H_{\beta}$ ,  $H_{\alpha}$  και  $N_{\alpha}$ .

Χρησιμοποιώντας ένα λεπτό πρίσμα σε θέση ελάχιστης εκτροπής ( $\lambda_D$ ) για την γραμμή D του Νατρίου, για παράδειγμα, βρίσκουμε ότι, ο λόγος της γωνιακής απόκλισης των μηκών κύματος F και C ως προς την εκτροπή του μήκους κύματος D, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4, είναι ίσος προς

$$\Delta = \frac{D}{\delta} = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1} \quad (11)$$

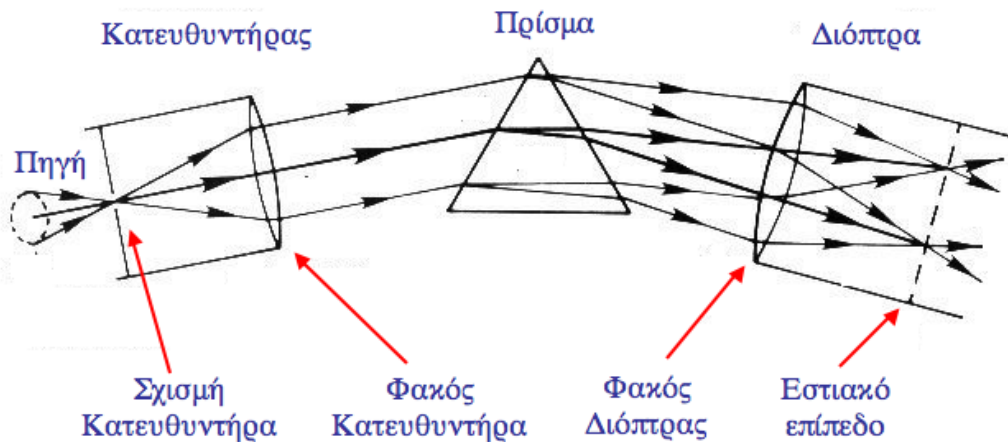
Αυτή η ποσότητα, που συσχετίζει τη διασπορά με την εκτροπή ενός πρίσματος, ονομάζεται *διασκεδαστική ικανότητα*. Το αντίστροφο της διασκεδαστικής ικανότητας,  $\gamma$ , είναι γνωστό ως *αριθμός Abbe*, και κείται γενικά στην περιοχή  $20 < \gamma < 100$ .

<b>Επιλεγμένοι δείκτες διάθλασης για <math>\lambda=589</math> nm (για πιο πλήρη λίστα δίνεται στο <a href="#">List of refractive indices</a>)</b>	
<b>Υλικό</b>	<b><i>n</i></b>
<u>Αέρια σε 0 °C και 1 atm</u>	
<a href="#">Αέρας</a>	1.000293
<a href="#">Ηλιο (He)</a>	1.000036
<a href="#">Υδρογόνο (H)</a>	1.000132
<a href="#">Διοξείδιο του Ανθρακος (CO<sub>2</sub>)</a>	1.00045
<u>Υγρά σε 20 °C</u>	
<a href="#">Νερό (H<sub>2</sub>O)</a>	1.333
<a href="#">Εθανόλη</a>	1.36
<a href="#">Βενζίνη</a>	1.501
<u>Στερεά</u>	
<a href="#">Πάγος</a>	1.309
<a href="#">Fused silica</a>	1.46
<a href="#">PMMA (Plexiglas)</a>	1.49
<a href="#">Crown glass (typical)</a>	1.52
<a href="#">Flint glass (typical)</a>	1.62
<a href="#">Διαμάντι</a>	2.42

### **Φασματοσκόπιο πρίσματος**

Ένα όργανο ανάλυσης φάσματος που χρησιμοποιεί ένα πρίσμα ως στοιχείο διασποράς, λέγεται φασματοσκόπιο. Η αρχή λειτουργίας των φασματοσκοπίων με πρίσμα φαίνεται στο Σχήμα 5.

Μία παράλληλη φωτεινή δέσμη αναλύεται περνώντας μέσα από πρίσμα και εν συνεχεία φακός εστιάζει τις παράλληλες ακτίνες και σχηματίζει το φάσμα. Για την δημιουργία της παράλληλης δέσμης χρησιμοποιείται ο *κατευθυντήρας*, ο οποίος αποτελείται από σωλήνα που έχει σχισμή στο ένα άκρο και συγκλίνοντα φακό  $\Phi_1$  στο άλλο και σε απόσταση ίση προς την εστιακή του απόσταση. Εάν η σχισμή είναι λεπτή και η φωτεινή πηγή είναι μονοχρωματική, όλες οι παράλληλες ακτίνες εισερχόμενες στο πρίσμα θα διαθλαστούν αλλά θα εξακολουθήσουν να είναι παράλληλες. Κατά την έξοδό τους από το πρίσμα θα υποστούν ξανά διάθλαση εξακολουθώντας να είναι παράλληλες, και συνεπώς ο δεύτερος φακός  $\Phi_2$ , θα δημιουργήσει στο εστιακό του επίπεδο πραγματικό είδωλο της σχισμής του κατευθυντήρα, δηλαδή μια φωτεινή γραμμή (φασματική γραμμή). Το πλάτος της φωτεινής γραμμής ρυθμίζεται μεταβάλλοντας το πλάτος της σχισμής εισόδου. Η παρατήρηση του ειδώλου γίνεται με μεγεθυντικό φακό. Ο φακός  $\Phi_2$  και ο μεγεθυντικός φακός είναι στερεωμένοι στα άκρα σωλήνα και αποτελούν την *διόπτρα παρατήρησης* του οργάνου.



**Σχήμα 5:** Σχηματική απεικόνιση φασματοσκοπίου με πρίσμα.

Εάν το φως της πηγής δεν είναι μονοχρωματικό, τότε οι ακτίνες κάθε μήκους κύματος εξερχόμενες από το πρίσμα θα δημιουργούν, όπως και προηγουμένως, παράλληλες δέσμες, αλλά με διαφορετικές διευθύνσεις. Οι προκύπτουσες έγχρωμες γραμμές αποτελούν το φάσμα της εξεταζόμενης φωτεινής πηγής. Επειδή συνήθως τα φάσματα είναι εκτεταμένα πέρα από το οπτικό πεδίο της διόπτρας, αυτή μπορεί να στρέφεται, ώστε να διερευνάται κατά περιοχές ολόκληρο το φάσμα.

Όταν αντί της διόπτρας χρησιμοποιηθεί ένα όργανο καταγραφής του φάσματος (ψηφιακή κάμερα CCD, καταγραφικό, φωτογραφική πλάκα), το όργανο ονομάζεται φασματογράφος.

Ο τύπος του γυαλιού από το οποίο είναι κατασκευασμένο το πρίσμα και οι φακοί καθορίζει την περιοχή μηκών κύματος στην οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο φασματογράφος.

Για να μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο φασματογράφος π.χ. στο υπεριώδες, χρειάζονται πρίσματα π.χ. από χαλαζία ( $\text{SiO}_2$ ) ή από  $\text{CaF}_2$ . Για το υπέρυθρο, χρησιμοποιούνται πρίσματα από  $\text{NaCl}$ ,  $\text{KCl}$  και  $\text{Al}_2\text{O}_3$ .

### Διακριτική ικανότητα φασματοσκοπίου πρίσματος

Η διακριτική ικανότητα ενός φασματογράφου, δηλαδή η ικανότητά του να διακρίνει δύο γειτονικά μήκη κύματος, είναι προφανώς μια πολύ σημαντική παράμετρος. Οι παρατηρούμενες φασματικές γραμμές είναι στην ουσία είδωλα της σχισμής εισόδου. Λόγω περίθλασης, το πλάτος του ειδώλου της σχισμής δεν μπορεί να ελαττωθεί πέραν ενός σημείου, όσο και να ελαττώσουμε το πλάτος της σχισμής εισόδου. Το διακριτικό όριο του φασματογράφου αντιστοιχεί στην ελάχιστη διαφορά μήκους κύματος  $\Delta\lambda$ , την οποία πρέπει να έχουν δύο γειτονικές φασματικές γραμμές για να διακρίνονται μεταξύ τους.

Ας θεωρήσουμε (Σχήμα 6) μια μονοχρωματική παράλληλη δέσμη φωτός μήκους κύματος  $\lambda$ , που προσπίπτει σε πρίσμα, καλύπτοντας εντελώς την πλευρά στην οποία προσπίπτει.

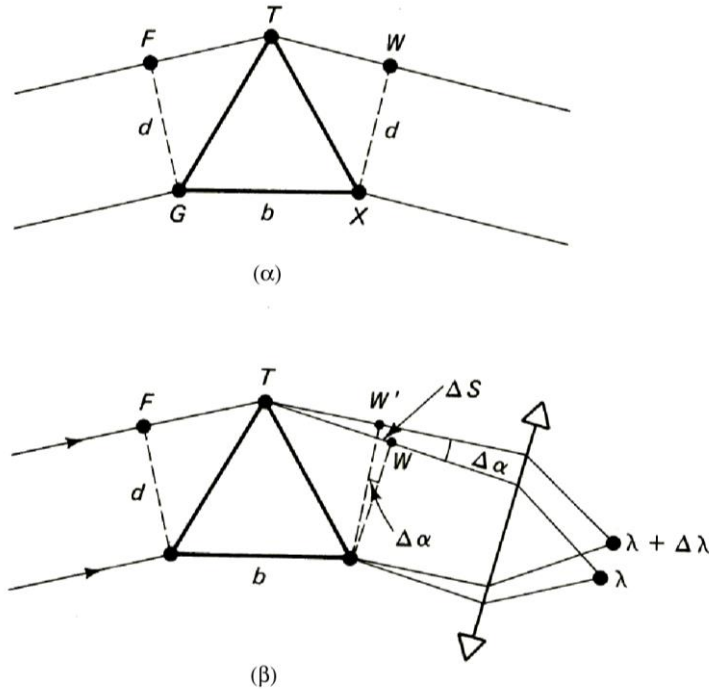
Από την αρχή του Fermat, είναι προφανές ότι η ακτίνα FTW είναι ισόχρονη με την ακτίνα GX, εφόσον ξεκινούν και καταλήγουν στα ίδια κυματικά μέτωπα, GF και XW, αντίστοιχα. Επομένως, οι οπτικοί δρόμοι μπορούν να εξισωθούν, δίνοντας

$$FT + TW = nb \quad (12)$$

όπου  $b$  είναι το μήκος της βάσης του πρίσματος και  $n$  ο δείκτης διάθλασης του υλικού του πρίσματος για το συγκεκριμένο μήκος κύματος,  $\lambda$ .

Έστω ότι η προσπίπτουσα δέσμη δεν είναι μονοχρωματική, αλλά εμπεριέχει άλλο ένα γειτονικό μήκος κύματος  $\lambda'$ , με  $\lambda' - \lambda = \Delta\lambda$ . Στο μήκος κύματος  $\lambda'$  αντιστοιχεί ένας διαφορετικός δείκτης διάθλασης  $n' = n - \Delta n$ .





**Σχήμα 6:** Διαγράμματα που χρησιμοποιούνται στην εύρεση της διακριτικής ικανότητας πρίσματος : (α) διάθλαση από πρίσμα για μονοχρωματικό φως, (β) διάθλαση από πρίσμα για δύο γειτονικά μήκη κύματος που απέχουν μεταξύ τους κατά  $\Delta\lambda$ .

Για “ομαλή” διασπορά, το  $\Delta n$  θα είναι μικρή θετική ποσότητα. Έτσι, τα δύο εξερχόμενα κυματικά μέτωπα θα έχουν μια μικρή γωνιακή απόσταση  $\Delta\alpha$  μεταξύ τους και επομένως θα εστιαστούν σε διαφορετικά σημεία στο εστιακό επίπεδο της διόπτρας. Από την αρχή του Fermat (για το  $\lambda$ ), παίρνουμε ότι

$$FT + TW - \Delta S = (n - \Delta n)b \quad (13)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις (12) & (13) προκύπτει ότι

$$\Delta S = b\Delta n \Rightarrow \Delta S = b \frac{dn}{d\lambda} \Delta\lambda$$

Η γωνιακή απόσταση  $\Delta\alpha$  είναι ίση προς  $\Delta S/d$ , όπου  $d$  το πλάτος της δέσμης. Συνεπώς,

$$\Delta\alpha = \frac{b}{d} \left( \frac{dn}{d\lambda} \right) \Delta\lambda \quad (14)$$

Σύμφωνα με το κριτήριο Rayleigh (βλ. Κεφ. Περίθλασης), η ελάχιστη γωνιακή απόσταση  $\Delta\alpha$  μεταξύ των δύο κυματικών μετώπων, ώστε τα σχηματιζόμενα είδωλα μόλις να διακρίνονται μεταξύ τους, δίνεται από την σχέση

$$\Delta\alpha_{\min} = \frac{\lambda}{d} \quad (15)$$

Από τις εξισώσεις (14) και (15) προκύπτει ότι η ελάχιστη απόσταση μεταξύ γειτονικών μηκών κύματος, ώστε τα αντίστοιχα είδωλα μόλις να διακρίνονται μεταξύ τους, είναι



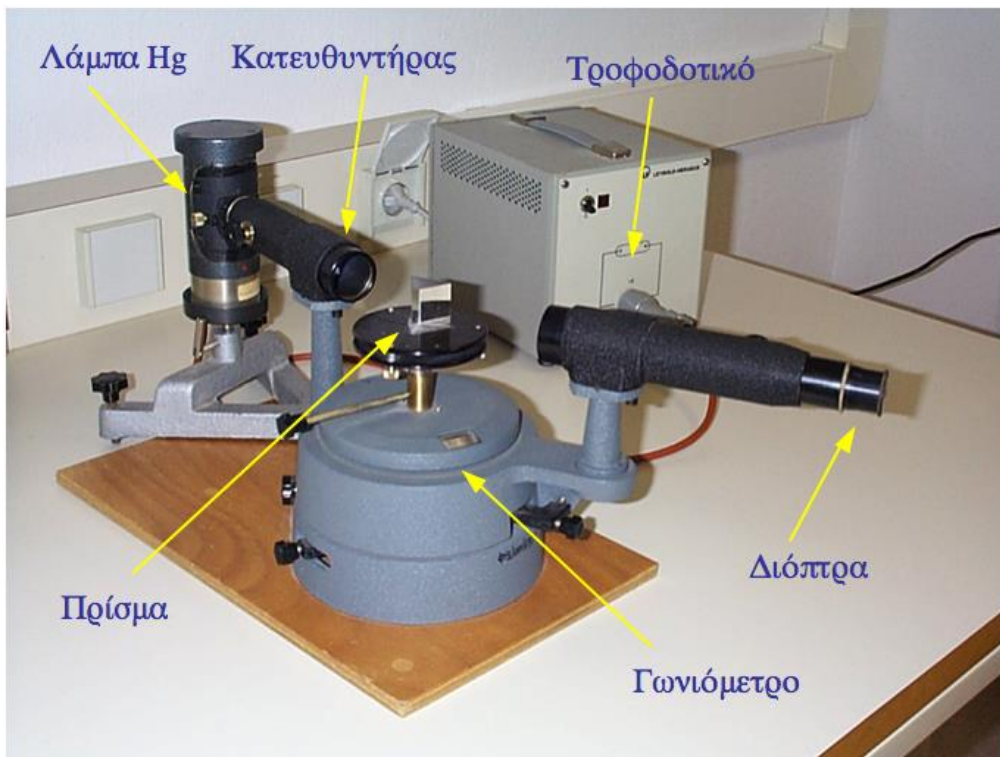
$$(\Delta\alpha)_{\min} = b \left( \frac{dn}{d\lambda} \right) (\Delta\lambda)_{\min} \Rightarrow (\Delta\lambda)_{\min} = \frac{\lambda}{b \left( \frac{dn}{d\lambda} \right)}$$

Συνεπώς, η διακριτική ικανότητα του πρίσματος, θα δίνεται από τον τύπο

$$R = \frac{\lambda}{(\Delta\lambda)_{\min}} = b \frac{dn}{d\lambda} \quad (16)$$

### 3. Περιγραφή της πειραματικής διάταξης

Για την μελέτη του πρίσματος χρησιμοποιούμε γωνιόμετρο και λυχνία ατμών υδραργύρου. Η πειραματική διάταξη φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



**Σχήμα 7:** Πειραματική διάταξη αποτελούμενη από το γωνιόμετρο με την τράπεζα και το πρίσμα, την διόπτρα, τον κατευθυντήρα, και την λάμπα υδραργύρου με το αντίστοιχο τροφοδοτικό.

Το γωνιόμετρο αποτελείται από τον κατευθυντήρα, την διόπτρα και τον δίσκο όπου τοποθετείται το πρίσμα που μελετάται κάθε φορά.

Για να μετρηθούν με ακρίβεια οι διάφορες γωνίες πρέπει απαραίτητως η φωτεινή πηγή να παράγει δέσμη όσο γίνεται λιγότερο αποκλίνουσα. Με την σωστή ρύθμιση του φακού του κατευθυντήρα είναι δυνατόν η δέσμη που εξέρχεται να είναι παράλληλη. Από την θεωρία της οπτικής, η διόπτρα οφείλει να είναι ρυθμισμένη στο άπειρο (δηλ. να σχηματίζει το είδωλο της σχισμής ευκρινώς σε μεγάλη απόσταση).

Ο δίσκος περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα.

Το γωνιόμετρο που πρόκειται να χρησιμοποιήσετε επιτρέπει την μέτρηση γωνιών με ακρίβεια της τάξης ενός πρώτου λεπτού της μοίρας. Ωστόσο, αυτό επιτυγχάνεται μετά από προσεκτικές και διαδοχικές μηχανικές και οπτικές ρυθμίσεις.

## 4. Εκτέλεση του πειράματος

### 4.1 Ρύθμιση του οργάνου

#### Μηχανικές ρυθμίσεις

Το επίπεδο του δίσκου στο γωνιόμετρο πρέπει να είναι παράλληλο προς το επίπεδο που ορίζουν οι άξονες του κατευθυντήρα και της διόπτρας.

Παρατηρήστε ότι ο άξονας περιστροφής του δίσκου είναι κάθετος προς το βάθρο του οργάνου. Αυτό σημαίνει ότι ρυθμίζοντας κατάλληλα τους τρεις κοχλίες που συνδέουν το δίσκο με τον άξονα θα επιτύχετε και την ζητούμενη παραλληλία.

#### Οπτικές ρυθμίσεις

Τοποθετήστε την λάμπα υδραργύρου στην οπτική τράπεζα και τροφοδοτήστε την.

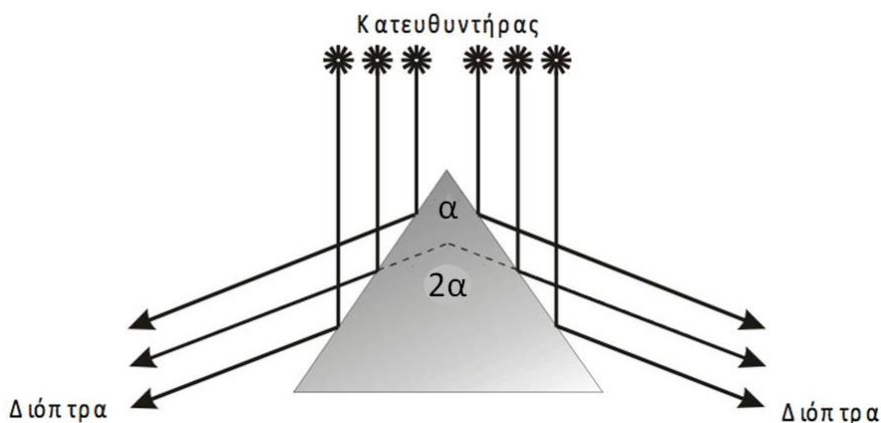
Ρυθμίστε με τον κοχλία την διόπτρα στο άπειρο. Βεβαιωθείτε ότι βλέπετε το σταυρόνημα ευκρινώς (σε αυτή τη ρύθμιση το σταυρόνημα που παρατηρείτε βρίσκεται στην εστία του αντικειμενικού φακού).

### 4.2 Μέτρηση της γωνίας του πρίσματος

#### Πειραματική Διαδικασία

Τοποθετήστε το πρίσμα στον δίσκο όπως στο σχήμα 8. Σημειώστε την γωνία κατά την οποία πρέπει να στραφεί η διόπτρα ώστε να παρατηρήσετε διαδοχικά τα δύο λευκά είδωλα (από ανάκλαση). Αυτή η γωνία είναι διπλάσια από αυτή του πρίσματος (βλέπε σχήμα 8).

Εξηγείστε, γιατί.



Σχήμα 8: Μέτρηση της γωνίας του πρίσματος  $\alpha$

Υπόδειξη 1: Οι μετρήσεις αυτές γίνονται με φαρδιά δέσμη (ρυθμίστε το άνοιγμα της σχισμής εισόδου) φωτός, τόσο φαρδιά ώστε να μοιράζεται και στις δύο πλευρές του πρίσματος όπως φαίνεται στο σχήμα 8.

Υπόδειξη 2: Για ευκολία παρατήρησης των μικρών και λεπτών γραμμών του βερνιέρου για την ακριβή μέτρηση των γωνιών χρησιμοποιείτε μεγενθτικό φακό ή φωτογραφίστε με το κινητό σας τον βερνιέρο υπό μεγέθυνση (zoom).

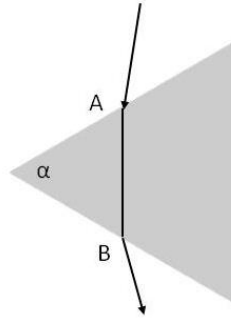
#### Ζητούμενα

- Υπολογίστε την γωνία  $\alpha = (2\alpha) / 2$  του πρίσματος (Σχήμα 8).
- Επαναλάβετε τη διαδικασία μερικές φορές, και βρείτε την μέση τιμή και το αντίστοιχο σφάλμα.

### 4.3 Μέτρηση της γωνίας ελάχιστης απόκλισης

#### Πειραματική Διαδικασία:

1. Τοποθετήστε το πρίσμα στον δίσκο σύμφωνα με το Σχήμα 9.



**Σχήμα 9:** Τοποθέτηση του πρίσματος (σε κάτοψη) για την μέτρηση της γωνίας ελάχιστης απόκλισης

Λόγω διάθλασης η δέσμη εξέρχεται από το πρίσμα υπό γωνία ως προς την βάση του. Είναι σημαντικό να ρυθμίσετε το άνοιγμα της σχισμής εισόδου του κατευθυντήρα ώστε η δέσμη που θα παρατηρήσετε να μην έχει εκτυφλωτική ένταση. Αναζητήστε την έξοδο από το πρίσμα του Σχήματος 9 (προσέχοντας να ρυθμίσετε το άνοιγμα της σχισμής) και διαπιστώστε ότι δεν είναι πλέον μία λευκή δέσμη, αλλά πολλές κατακόρυφες γραμμές διαφορετικού χρώματος. Το φάσμα που παίρνετε δείχνει ότι η απόκλιση μεταβάλλεται με το μήκος κύματος.

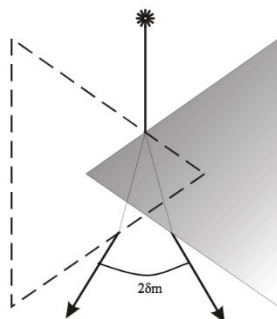
2. Ελαττώστε **αργά** την γωνία πρόσπτωσης περιστρέφοντας το δίσκο. Παρακολουθείτε την κίνηση του δίσκου με την δίοπτρα. Παρατηρείτε ότι το είδωλο στρέφεται όπως και το πρίσμα, στην συνέχεια σταματάει και τέλος κινείται αντίθετα από τον δίσκο, που εξακολουθεί βεβαίως να κινείται με την αρχική φορά. Η θέση όπου το είδωλο μένει σταθερό (αλλαγή φοράς), αντιστοιχεί στην ελάχιστη απόκλιση της εξερχόμενης δέσμης (γωνία  $\delta_m$ ) ως προς την εισερχόμενη (στο πρίσμα).

Καταγράψτε τις θέσεις ελάχιστης απόκλισης για τις διάφορες γραμμές του ατόμου του υδραργύρου.

*Υπόδειξη:* Σύμφωνα με την θεωρία που αναπτύχθηκε στην αρχή του κεφαλαίου στην γωνία ελαχιστης απόκλισης  $\delta_m$  ισχύει  $\theta_{i1} = \theta_{t2}$  και  $\theta_{i2} = \theta_{t1}$  οπότε στην θέση αυτή η δέσμη μέσα στο πρίσμα (Σχήμα 9  $AB$  - όχι έξω από το πρίσμα!) διαπερνά το πρίσμα με κατεύθυνση παράλληλη προς την βάση του. Και αυτό ισχύει για όλα τα μήκη κύματος  $\lambda$ , οπότε η θέση αυτή είναι ανεξάρτητη του  $\lambda$ .

*Αποδείξτε ότι όντως η  $AB$  είναι παράλληλη προς την βάση στην θέση αυτή.*

3. Τοποθετήστε το πρίσμα συμμετρικά ως προς την αρχική θέση. Το Σχήμα 10 δείχνει την νέα θέση του πρίσματος με την συνεχή γραμμή, ενώ την αρχική με διακεκομμένη. Εντοπίστε τις νέες θέσεις ελάχιστης απόκλισης. Από τις δύο θέσεις ελάχιστης απόκλισης βρείτε για κάθε γραμμή την γωνία  $2\delta_m$ .
4. Μετρήστε το μήκος της βάσης του πρίσματος



**Σχήμα 10:** Οι δύο συμμετρικές θέσεις του πρίσματος για την μέτρηση της γωνίας  $2\delta_m$ .

Οι μετρήσεις να γίνονται με προσοχή.

Ελέγξτε ότι πήρατε όλες τις μετρήσεις που απαιτούνται από το πείραμα.

Πριν αρχίσετε να κάνετε την επεξεργασία των δεδομένων, βεβαιωθείτε ότι η λυχνία είναι σβησμένη και όλα τα όργανα που χρησιμοποιήσατε είναι εκτός τροφοδοσίας.

### Ζητούμενα

1. Με τα πειραματικά δεδομένα για την λάμπα υδραργύρου συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

$\lambda_{\text{θεωρ}} \text{ (nm)}$	404.66	435.84	546.08	579.07
<b>θέση (pixel)</b>				
$1/\lambda^2$				
$\delta_m$				
$\left(\frac{\alpha + \delta_m}{2}\right)$				
$\sin\left(\frac{\alpha + \delta_m}{2}\right)$				
$\sin(\alpha/2)$				
$n$				
$\Delta n^*$				

2. Βρείτε τις τιμές των σταθερών A και B της σχέσης (9) (κρατώντας τους δύο πρώτους όρους του αναπτύγματος). Να υπολογισθεί το σφάλμα στον προσδιορισμό των σταθερών αυτών.
3. Βρείτε τον αριθμό Abbe του πρίσματος που χρησιμοποιήσατε (να υπολογισθεί και το αντίστοιχο σφάλμα) και ελέγξτε εάν κείται στην αναμενόμενη περιοχή τιμών.
4. Χρησιμοποιώντας τις μετρήσεις σας για την διασπορά του πρίσματος και για το μήκος της βάσης του πρίσματος, υπολογίστε την διακριτική ικανότητά του, για  $\lambda=546,1\text{nm}$

### Βιβλιογραφία

\* Να αποδειχθεί ο τύπος που δίνει το σχετικό σφάλμα στην μέτρηση του n είναι:  $\Delta n/n = (\Delta\alpha/2) / \tan(\alpha/2)$ .

- F.L. Pedrotti & L.S. Pedrotti, Introduction to Optics, Prentice Hall International Editions, 1993, ch. 6-2
- E. Hecht, Optics, Addison-Wesley Publishing Company, 1987, ch. 5.5
- Κ.Δ. Αλεξοπούλου, Οπτική, παράγραφοι 19, 66-69, 117
- Feynman, Lectures on Physics, vol. I, II, κεφ. 26, 31 (τομ I), κεφ. 33 (τομ. II)
- Halliday-Resnick, Φυσική, τομ. II, παράγραφοι 41.1, 41.6
- Μαθήματα Φυσικής Πανεπιστημίου Berkeley, τομ. 3 (Κυματική), παράγραφος 4.3

### 3. ΣΥΜΒΟΛΟΜΕΤΡΟ FABRY-PEROT

#### 1. Σκοπός

- Παρατήρηση της συμβολής πολλαπλών δεσμών (multiple-beam interference) φωτός που προέρχεται από μονοχρωματική σύμφωνη πηγή Laser
- Μέτρηση του μήκους κύματος της ακτινοβολίας του Laser
- Χαρακτηρισμός του συμβολομέτρου Fabry-Perot

#### 2. Στοιχεία Θεωρίας

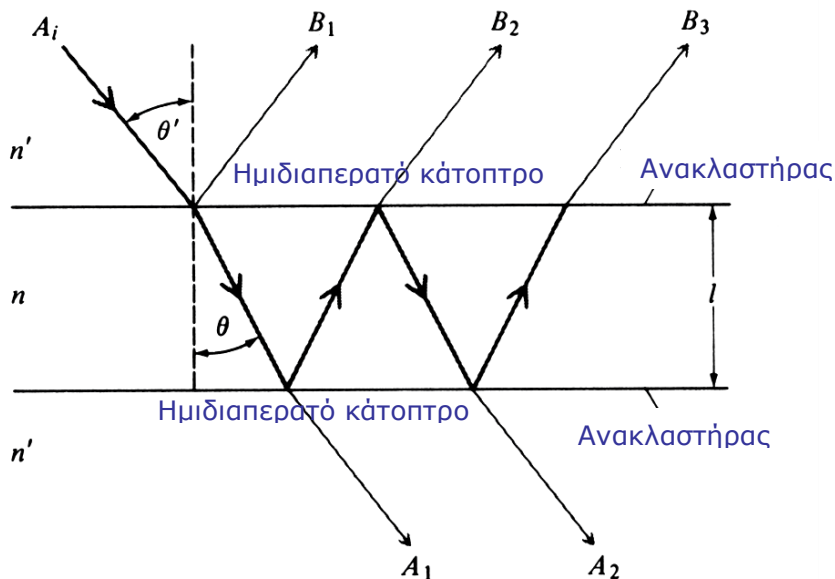
##### Βασική προαπαιτούμενη γνώση

Serway, Physics for Scientists & Engineers, Τόμος ΙΙΙ, Κεφ. 37.1, 37.2, 37.3, 37.4, 37.6 (συμπεριλαμβανομένων των αντίστοιχων παραδειγμάτων και προβλημάτων).

#### 2.1 Συμβολή πολλαπλών δεσμών

Έχετε ήδη ασχοληθεί με φαινόμενα συμβολής από δύο σύμφωνες δέσμες (ΦΙ). Στο πείραμά μας θα ασχοληθούμε με μια εφαρμογή συμβολομετρίας πολλαπλών δεσμών.

Η πιο συνηθισμένη μέθοδος παραγωγής ενός μεγάλου αριθμού σύμφωνων φωτεινών δεσμών είναι η διαίρεση κατά πλάτος. Αυτή μπορεί να επιτευχθεί με πολλαπλή ανάκλαση μεταξύ δύο παράλληλων ημιδιαπερατών επιφανειών. Αυτές οι επιφάνειες μπορεί να είναι π.χ. ημιδιαπερατά κάτοπτρα, ή απλώς οι δυο πλευρές ενός φιλμ, ή μιας πλάκας διαφανούς υλικού, οι οποίες ανακλούν ένα μέρος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας, ενώ το υπόλοιπο της διαπερνά. Στο Σχήμα 1 παρουσιάζεται σχηματικά μια τέτοια διάταξη.

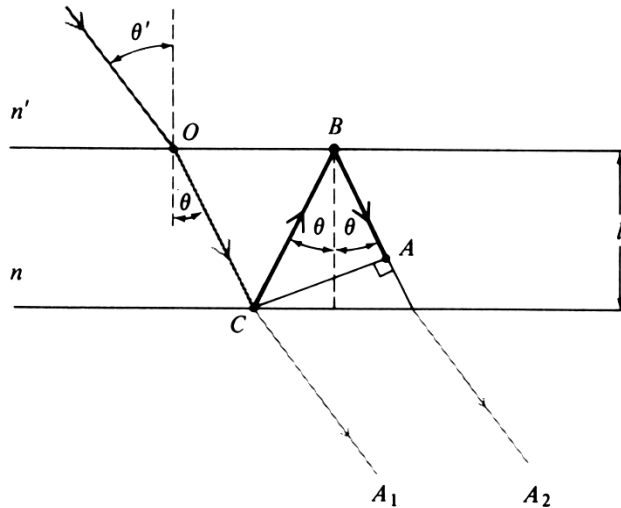


**Σχήμα 1:** Παράδειγμα παραγωγής σύμφωνων δεσμών από μία αρχική δέσμη, μέσω πολλαπλής ανάκλασης μεταξύ δύο ημιδιαπερατών κάτοπτρων.

Η κύρια δέσμη, προσπίπτουσα στην πρώτη επιφάνεια, κατά ένα μέρος διαδίδεται και κατά ένα μέρος ανακλάται. Το διαδιδόμενο τμήμα της εν συνεχεία ανακλάται εκ νέου και διαδοχικά από τις δύο επιφάνειες

όπως φαίνεται στο σχήμα. Μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα της διάδοσης ή ανάκλασης του επίπεδου κύματος δια μέσου του συμβολόμετρου, θεωρώντας τα άπειρα σε αριθμό μερικά κύματα που δημιουργούνται από τις διαδοχικές ανακλάσεις στις δύο επιφάνειες. Η διαφορά φάσης μεταξύ δύο μερικών κυμάτων, που αντιστοιχεί σε μια ολόκληρη διαδρομή μέσα στο συμβολόμετρο, δίνεται από την ακόλουθη σχέση σύμφωνα με το Σχήμα 2 (η απόδειξη αφήνεται στον φοιτητή):

$$\delta = \frac{4\pi n \cos \theta}{\lambda} l \quad (1)$$



**Σχήμα 2.** Δύο διαδοχικές διερχόμενες ακτίνες  $A_1$  και  $A_2$ .

Στη σχέση (1) το  $\lambda$  είναι το μήκος κύματος του προσπίπτοντος κύματος και  $\theta$  είναι η εσωτερική γωνία πρόσπτωσης.

Αν το μιγαδικό πλάτος του προσπίπτοντος κύματος είναι  $A_i$ , τότε οι μερικές ανακλάσεις  $B_1$  και  $B_2$  κλπ (βλ. Σχήμα 1) δίνονται από τις σχέσεις

$$B_1 = r A_i, \quad B_2 = t t' r' A_i e^{i\delta}, \quad B_3 = t t' r'^3 A_i e^{2i\delta}, \dots \quad (2)$$

όπου  $r$  είναι ο συντελεστής ανακλάσεως (δηλ. ο λόγος του πλάτους του ανακλώμενου κύματος προς το προσπίπτον),  $t$  είναι ο συντελεστής διαδόσεως για κύματα που προχωρούν από το υλικό με δείκτη  $n'$  προς το υλικό με δείκτη διάθλασης  $n$ , και  $r'$  και  $t'$  είναι οι αντίστοιχες ποσότητες για κύματα που διαδίδονται από το υλικό  $n$  στο υλικό  $n'$ . Το μιγαδικό πλάτος του ολικού ανακλώμενου κύματος είναι:

$$A_r = B_1 + B_2 + B_3 + \dots = \{ r + t t' r' e^{i\delta} (1 + r'^2 e^{i\delta} + r'^4 e^{2i\delta} + \dots) \} A_i \quad (3)$$

Αντίστοιχα, για το κύμα που διαδίδεται έχουμε:

$$A_l = t t' A_i, \quad A_2 = t t' r'^2 e^{i\delta} A_i, \quad A_3 = t t' r'^4 e^{2i\delta} A_i \quad (4)^2$$

Προσθέτοντας τους όρους βρίσκουμε για το μιγαδικό πλάτος του ολικού κύματος που διαπερνά το σύστημα των κατόπτρων βρίσκουμε:

<sup>2</sup> όπου ο συντελεστής φάσης  $e^{i\delta}$  που αντιστοιχεί στο απλό πέρασμα μέσω της πλάκας και που είναι κοινός για όλους τους όρους, έχει παραληφθεί.

$$A_t = tt' (1 + r'^2 e^{i\delta} + r'^4 e^{2i\delta} + \dots) \quad (5)$$

Παρατηρούμε ότι οι όροι μέσα στις παρενθέσεις στις εξισώσεις (3) και (5) είναι όροι γεωμετρικής σειράς οπότε έχουμε:

$$A_t = \frac{(1 - e^{i\delta})\sqrt{R}}{1 - Re^{i\delta}} A_i \quad (6)$$

και

$$A_t = \frac{T}{1 - Re^{i\delta}} A_i \quad (7)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση  $r' = -r$ , τη σχέση  $r^2 + tt' = 1$ , που εκφράζει την αρχή διατηρήσεως της ενέργειας για κάτοπτρα χωρίς απώλειες, καθώς και τους ορισμούς,  $R \equiv r'^2 = r^2$  και  $T \equiv tt'$ , για την ανακλαστικότητα (reflectance) και διαπερατότητα (transmittance) ενός κατόπτρου αντίστοιχα.

Η ένταση του διαδιδόμενου κύματος είναι  $I_T = A_T A_T^*$ , οπότε από την (7) βρίσκουμε<sup>3</sup> ότι

$$I_T = I_o \frac{T^2}{(1 - R)^2} \frac{1}{1 + F \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} \quad (8)$$

όπου

$$F = \frac{4R}{(1 - R)^2} \quad (9)$$

ο λεγόμενος **συντελεστής λεπτότητας ή ευδιακρισίας** (coefficient of finesse), που αποτελεί ένα μέτρο του πόσο λεπτοί/ευδιάκριτοι είναι οι κροσσοί συμβολής. Ο όρος  $1/\left(1 + F \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)\right)$  της εξίσωσης (8)

λέγεται **συνάρτηση του Airy**.

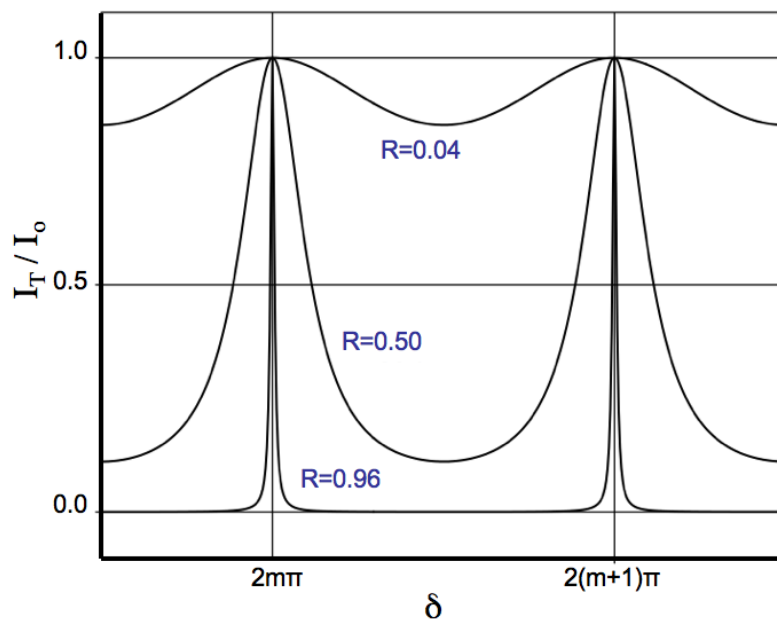
Η γενική συμπεριφορά των συναρτήσεων Airy φαίνεται στο Σχήμα 3, όπου παρουσιάζουμε μια γραφική παράσταση της εξίσωσης (8) στην οποία ο λόγος  $I_T/I_o$  έχει κανονικοποιηθεί ως προς  $R$ , ώστε το μέγιστο του να είναι πάντα μονάδα. Οι καμπύλες αντιστοιχούν σε διάφορες τιμές της ανακλαστικότητας  $R$ , και απεικονίζουν την κατανομή έντασης των κροσσών συμβολής για συμβολή πολλαπλών δεσμών. Παρατηρήστε ότι εάν η μεταβλητή  $\delta/2$  είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του  $\pi$ , δηλαδή  $\delta/2 = m\pi$ , όπου  $m$  ακέραιος, τότε η συνάρτηση του Airy έχει μέγιστο για κάθε  $F$  (και  $R$ ) και επομένως η ένταση του διαδιδόμενου κύματος  $I_T$  είναι επίσης μέγιστη. Η συνθήκη για μέγιστα μπορεί να γραφεί και ως (χρησιμοποιώντας την εξίσωση (1)),

$$2m\pi = \frac{4\pi}{\lambda_o} nl \cos\theta \quad (10)$$

Ο ακέραιος,  $m$ , ονομάζεται **τάξη συμβολής** (order of interference).

<sup>3</sup> Οι πράξεις αφήνονται ως άσκηση για τον φοιτητή.

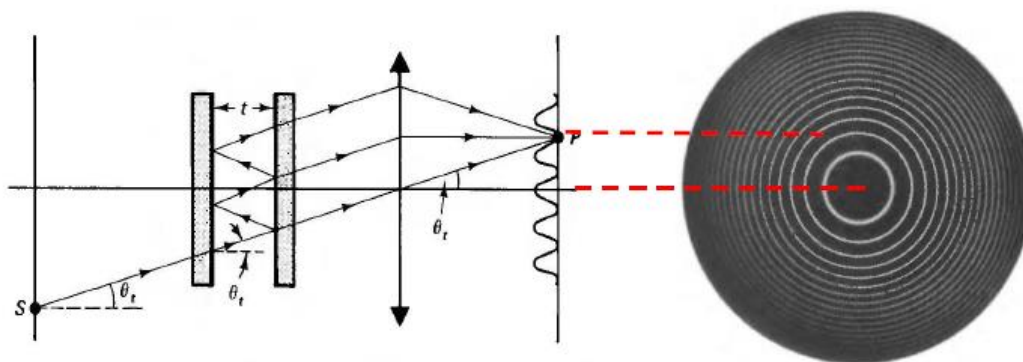




**Σχήμα 3:** Γραφική παράσταση του στο λόγο  $I_T/I_0$  της εξίσωσης (8) ως συνάρτηση του  $\delta$ , για διάφορες τιμές του  $R$ , που μας δείχνουν τη συνέπειες της συνάρτησης Airy στην ένταση του διαδιδόμενου κύματος.

## 2.2 Συμβολόμετρο Fabry-Perot

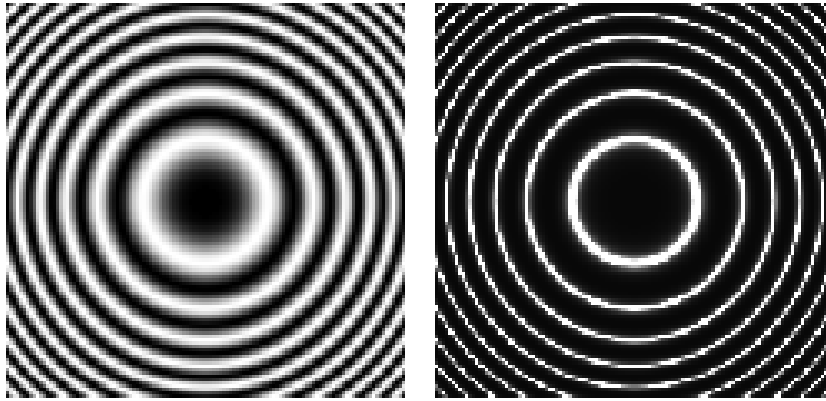
Το συμβολόμετρο αυτό, που χρησιμοποιεί τις αρχές συμβολής πολλαπλών δεσμών, σχεδιάστηκε για πρώτη φορά από τους Fabry και Perot το 1899. Χρησιμοποιείται για την ακριβή μέτρηση μήκους κύματος, και για την μελέτη της λεπτής δομής φασματικών γραμμών. Το συμβολόμετρο Fabry-Perot αποτελείται από δύο επίπεδες μερικώς ανακλαστικές επιφάνειες από γυαλί ή quartz, που διατηρούνται με ακρίβεια σε παραλληλία μεταξύ τους. Εάν η απόσταση μεταξύ των πλακών μπορεί να μεταβάλλεται με κάποιο μηχανισμό, τότε η συσκευή λέγεται «συμβολόμετρο». Εάν η απόσταση μεταξύ των δύο πλακών παραμένει σταθερή τότε μιλάμε για το «έταλον» Fabry-Perot. Οι επιφάνειες των δύο πλακών πρέπει να είναι εξαιρετικά επίπεδες (με ακρίβεια από 1/20 μέχρι 1/100 του  $\lambda$ !) και παράλληλες για να μπορεί να επιτευχθεί η καλύτερη δυνατή λεπτότητα των κροσσών. Στο Σχήμα 4 φαίνεται μια τυπική διάταξη συμβολόμετρου F-P.



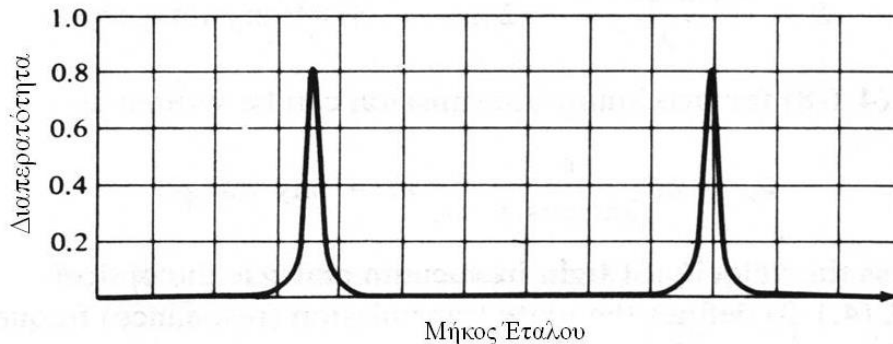
**Σχήμα 4:** Τυπική πειραματική διάταξη ενός Fabry-Perot μεταβλητού μήκους. Στην περίπτωση (όπως εδώ) που το πέτασμα είναι αρκετά μακριά δεν γίνεται χρήση φακού κατά την έξοδο. Η γωνία  $\theta_i$  είναι μικρή αλλά όχι 0.

Συνήθως, όπως στην περίπτωση του πειράματός σας, μπροστά από το συμβολόμετρο F-P τοποθετείται ένας φακός. Το αποτέλεσμα είναι η γωνία πρόσπτωσης στην πρώτη πλάκα,  $\theta$ , να είναι διαφορετική,

ανάλογα με το σημείο πρόσπτωσης. Σύμφωνα με την (2.1-10), η συνθήκη για μέγιστα θα είναι διαφορετική για τις διαφορετικές γωνίες. Έτσι, στην έξοδο του συμβολομέτρου (π.χ. σε ένα πέτασμα που μπορεί να έχει τοποθετηθεί εκεί) θα δημιουργηθούν ομόκεντροι κροσσοί συμβολής, που λέγονται **κροσσοί ίσης κλίσης** (βλ. Σχήμα 5). Ένας άλλος τρόπος χρήσης του F-P χρησιμοποιεί την λεγόμενη μέθοδο σάρωσης (scanner method). Στην περίπτωση αυτή παρατηρούμε στη έξοδο το κέντρο του συστήματος των δακτυλίων. Η σάρωση επιτυγχάνεται μεταβάλλοντας την απόσταση μεταξύ των πλακών, είτε μηχανικά, είτε οπτικά (αλλάζοντας π.χ. σταδιακά την πίεση του αέρα μεταξύ των πλακών, μεταβάλλοντας έτσι τον δείκτη διάθλασης, άρα και τον οπτικό δρόμο). Η ένταση του κέντρου του δακτυλίου μπορεί να καταγραφεί με ένα φωτόμετρο. Με αυτό τον τρόπο παίρνουμε ένα διάγραμμα του συστήματος των κροσσών (βλ. Σχήμα 6), που ουσιαστικά ταυτίζεται με την συνάρτηση Airy.



**Σχήμα 5:** Κροσσοί συμβολής ίσης κλίσης, για μονοχρωματική πηγή, (αριστερά) με χαμηλό finesse, (δεξιά) με υψηλό finesse.



**Σχήμα 6.** Πειραματική καμπύλη διαπερατότητας ενός Fabry-Perot έταλου στα 632.8 nm ως συνάρτηση του οπτικού δρόμου του έταλου με  $R=0.9$  και  $A=0.98$ . Τα δύο μέγιστα στο σχήμα αντιστοιχούν σε μεταβολή της οπτικής διαδρομής  $\Delta(nl) = \lambda/2$ .

### 2.2.1 Ελεύθερο Φασματικό Εύρος

Η συνθήκη της εξίσωσης (10) μπορεί να γραφεί και ως:

$$v_m = m \frac{c}{2nl \cos \theta} \quad (11)$$

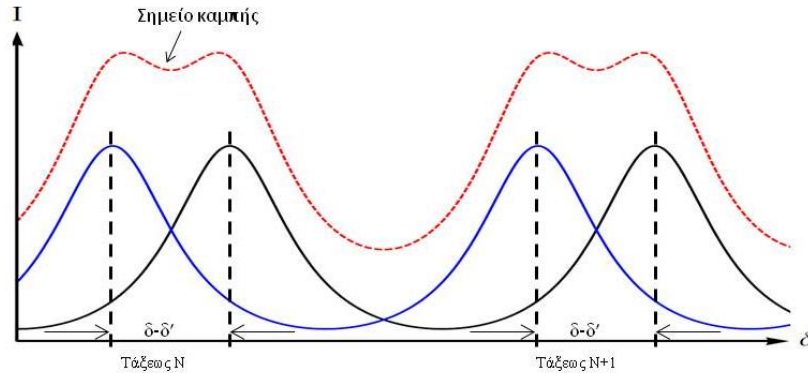
όπου,  $m$ , ακέραιος και  $v = c/\lambda$ . Για καθορισμένα  $l$  και  $\theta$  η εξίσωση (11) ορίζει τις συχνότητες εκείνες για τις οποίες η διαπερατότητα του F-P είναι μέγιστη (μονάδα, αν δεν έχουμε απορροφήσεις). Αυτές οι συχνότητες απέχουν μεταξύ τους κατά

$$\Delta\nu = \nu_{m+1} - \nu_m = \frac{c}{2nl \cos\theta} = FSR \quad (12)$$

που ονομάζεται *περιοχή μη διάδοσης ή ελεύθερο φασματικό εύρος* (free spectral range = FSR) του F-P.

### 2.2.2. Διακριτική Ικανότητα Fabry-Perot

Ας υποθέσουμε ότι ένα φάσμα αποτελείται από δύο πολύ κοντινές συχνότητες,  $\nu$ , και  $\nu'$ . Η κατανομή έντασης που θα προκύψει (από το F-P) θα είναι στην ουσία μια επικάλυψη δυο συστημάτων κροσσών συμβολής, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.



**Σχήμα 7:** Κατανομή έντασης για δυο μονοχρωματικές δέσμες που περνάνε από ένα συμβολόμετρο F-P.

Εάν υποθέσουμε ότι οι δυο συνιστώσες είναι ίσης έντασης, η τελική κατανομή έντασης θα είναι το άθροισμα των δύο αντίστοιχων συναρτήσεων Airy (βλέπε εξίσωση 8) δηλ.

$$I_T = I_o \frac{T^2}{(1-R)^2} \left( \frac{1}{1 + F \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} + \frac{1}{1 + F \sin^2\left(\frac{\delta'}{2}\right)} \right) \quad (13)$$

όπου  $\delta \approx 4\pi\nu l/c$  (σύμφωνα με την εξίσωση 1, για κάθετη πρόσπτωση, και  $n \approx 1$ ), και  $\delta' \approx 4\pi\nu' l/c$ .

Λέμε ότι μπορούμε να διακρίνουμε τις δυο συχνότητες μεταξύ τους όταν το σημείο διασταύρωσης (saddle point) που φαίνεται στο Σχήμα 7, βρίσκεται στο μισό της έντασης των δυο γραμμών, δηλαδή συνολικά στο σημείο αυτό η ένταση είναι  $I_s = 2x(I_o/2) = I_o$ . Επομένως, στο σημείο διασταύρωσης, που είναι στη μέση της απόστασης μεταξύ των δυο συχνοτήτων,  $\delta_s = (\delta - \delta')/2$ , μπορούμε να γράψουμε<sup>4</sup>:

$$I_s = 2I_o \left( 1 + F \sin^2\left(\frac{\delta - \delta'}{4}\right) \right)^{-1} = I_o \quad (14)$$

Εάν το  $\delta - \delta'$  είναι μικρό, τότε

$$\delta - \delta' = 4F^{-1/2} = 2 \left( \frac{1-R}{\sqrt{R}} \right) \quad (15)$$

οπότε

$$\Delta\nu_{1/2} = \frac{c}{2\pi l} \left( \frac{1-R}{\sqrt{R}} \right) \quad (16)$$

<sup>4</sup> όπου ο όρος  $T^2(1-R)^{-2}$  έχει ενσωματωθεί στο  $I_o$

που δίνει το πάχος του κροσσού στο μισό της μέγιστης έντασης, ή, ισοδύναμα, την ελάχιστη διαφορά δύο συχνοτήτων που μόλις διακρίνονται μεταξύ τους από ένα F-P μήκους  $l$ , και ανακλαστικότητας  $R$ . Μια αδιάστατη παράμετρος που χρησιμοποιείται συχνά στη συμβολομετρία είναι η **ανακλαστική λεπτότητα** (reflecting finesse)  $\mathcal{F}$ , η οποία ορίζεται ως ο λόγος του ελεύθερου φασματικού εύρους προς το πάχος του κροσσού  $\delta-\delta'$  ( $FSR = c / (2l)$ ), από εξίσωση 12, για γραμμική κυλότητα με  $\theta=0$ , και  $n=1$ ), δηλαδή :

$$\mathcal{F} = \frac{\delta_{m+1} - \delta_m}{|\delta - \delta'|} = \frac{\nu_{m+1} - \nu_m}{|\nu - \nu'|} = \frac{\pi}{2} \sqrt{F} = \pi \left( \frac{\sqrt{R}}{1-R} \right) \quad (17)$$

Η τιμή του  $\mathcal{F}$  καθορίζει πόσο ευκρινείς είναι οι κροσσοί. Μεγάλες τιμές του  $\mathcal{F}$  υποδηλώνουν πιο λεπτούς και ευκρινείς κροσσούς. *Προσοχή στην διαφορά μεταξύ  $\mathcal{F}$  και  $F$ !*

Η διακριτική ικανότητα ορίζεται ως  $\mathcal{R} = \nu / |\Delta\nu_{1/2}| = \lambda / |\Delta\lambda_{1/2}|$ , συνεπώς από τις εξισώσεις 10, 16 και 17 έχουμε,

$$\mathcal{R} = m\pi \left( \frac{\sqrt{R}}{1-R} \right) = m \mathcal{F} \quad (18)$$

Άρα, η διακριτική ικανότητα ενός F-P εξαρτάται από την τάξη συμβολής και από την ανακλαστικότητα των κατόπτρων. Αυξάνοντας την τάξη συμβολής, η διακριτική ικανότητα μπορεί να αυξηθεί «απεριόριστα» (για δεδομένη ανακλαστικότητα). Αυτό επιτυγχάνεται εύκολα αυξάνοντας την απόσταση μεταξύ των κατόπτρων, διότι  $m \approx (2nl) / \lambda$ . Όμως με αυτό τον τρόπο το ελεύθερο φασματικό εύρος ελαττώνεται.

### 3. Περιγραφή της πειραματικής διάταξης

Ο απαιτούμενος εξοπλισμός αποτελείται από:

- Ένα laser He-Ne ( $\lambda=632.8\text{nm}$ )
- Ένα συμβολόμετρο Fabry-Perot με μικρόμετρο
- Ένα φακό εισόδου
- Ένα πέτασμα με μιλλμετρέ χαρτί

Δίνεται ότι η ανακλαστικότητα των κατόπτρων του Fabry-Perot που θα χρησιμοποιήσετε είναι  $R_1 \approx R_2 \approx 80\%$ , οπότε η συνολική ανακλαστικότητα  $R$  του Fabry-Perot είναι  $R = \sqrt{R_1 R_2} = 0.8$ .

### 4. Εκτέλεση του πειράματος

1. Ανοίξτε το laser και αφήστε το να θερμαίνεται το λιγότερο για 15 λεπτά.
2. Ευθυγραμμίστε το F-P (χωρίς τον φακό εισόδου), ώστε στο πέτασμά σας να παρατηρήσετε μια όσο το δυνατό πιο συμμετρική και μικρή κουκίδα.
3. Παρατηρήστε πώς μεταβάλλεται η ένταση του ειδώλου στο πέτασμα, όταν μετακινήσετε το κινούμενο κάτοπτρο, χρησιμοποιώντας το μικρόμετρο της συσκευής. Εξηγήστε το φαινόμενο.
4. Τοποθετήστε τον φακό μπροστά από το Fabry-Perot, και παρατηρήστε την εικόνα που εμφανίζεται στο πέτασμά σας. Αυτό που βλέπετε είναι **οι κροσσοί ίσης κλίσης**. Κάνετε κατάλληλες ρυθμίσεις ώστε η εικόνα να είναι όσο το δυνατόν πιο συμμετρική.
5. Μετακινήστε το κινητό κάτοπτρο με τον μικρομετρικό κοχλία και παρατηρήστε πώς μεταβάλλεται η εικόνα στο πέτασμα. Εξηγήστε.
6. Για να μετρήσετε **το μήκος κύματος του laser** αρκεί να μετρήσετε την απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών κροσσών (για κάθετη πρόσπτωση). Για να το πετύχετε αυτό, μετακινείτε το μικρόμετρο αργά, μετρώντας ταυτόχρονα στο πέτασμα τον αριθμό των μεγίστων που σαρώνετε με αυτό τον τρόπο. Έστω ότι μετράτε 10 τέτοια μέγιστα. Η διαφορά της τελικής μείον την αρχική ένδειξη του μικρομέτρου θα σας δείξει πόσο έχει μετατοπισθεί η θέση του κινουμένου κατόπτρου. Από αυτά τα δεδομένα μπορείτε να υπολογίσετε το  $\lambda$ . *Υπόδειξη: Σύμφωνα με τις ενδείξεις του F-P ( $1 \text{ div} = 1 \text{ MICRON}$ ) η απόσταση μεταξύ δύο ελαχίστων υποδιαίρέσεων του μικρομέτρου*

- αντιστοιχεί σε μία μετατόπιση του κινουμένου κατόπτρου κατά  $\Delta l = 1 \mu\text{m}$  ή μια πλήρη περιστροφή του μικρομέτρου δηλαδή 25 υποδιαίρεσεις ισοδυναμεί με 25  $\mu\text{m}$ .
7. Για μεγαλύτερη ακρίβεια, είναι προτιμότερο να μετρήσετε πολύ περισσότερα μέγιστα, π.χ. 100, και να επαναλάβετε την μέτρησή σας μερικές φορές.
  8. Είναι εύκολο να χαθείτε στο μέτρημα. Για να αποφύγετε τέτοιου είδους σφάλματα μετρήματος των αριθμών των κροσσών μπορείτε να κάνετε το εξής απλό: Πάνω στο πέτασμα μαρκάρετε με μολύβι μια γραμμή αναφοράς που να εφάπτεται κάποιου κροσσού αναφοράς στο έξω μέρος του. Μετά μετράτε όλου τους κροσσούς που περνούν από αυτή την γραμμή (καθώς αλλάζετε την απόσταση μεταξύ των κατόπτρων) μέχρι να σταματήσετε το μέτρημα με τον τελικό κροσσό να είναι ακριβώς στην ίδια θέση σχετικά με την γραμμή αναφοράς.
  9. Βρείτε το  $\lambda$  και το αντίστοιχο σφάλμα  $\sigma_\lambda$ . Συγκρίνετε με την τιμή που σας δίνετε για το μήκος κύματος του laser.
  10. Από την απόσταση  $l$  των κατόπτρων του F-P ( $l = 3.48 \pm 0.01 \text{ mm}$  όταν το μικρόμετρο δείχνει 0), υπολογίστε το **ελεύθερο φασματικό εύρος (FSR) του F-P** (χρησιμοποιώντας της εξίσωση 12). Η ερώτηση αυτή μπορεί να απαντηθεί μόνο εφόσον μπορεί να μετρηθεί με ακρίβεια η απόλυτη απόσταση  $l$  μεταξύ των κατόπτρων. Η απόσταση αυτή έχει μετρηθεί με ακρίβεια και σας δίνεται ως  $l = 3.48 \pm 0.01 \text{ mm}$  στην θέση που το μικρόμετρο δείχνει 0.00.
  11. Υπολογίστε τη **λεπτότητα  $F$**  (όταν  $R_1 = R_2 = 0.8$ ) του F-P.
  12. Υπολογίστε την **ανακλαστική λεπτότητα  $\mathcal{F}$**  του F-P.
  13. Υπολογίστε το πάχος της γραμμής στο μισό της έντασης  $\Delta \nu_{1/2}$ , και την **διακριτική ικανότητα  $\mathcal{R}$**  του F-P, σε πρώτη και δεύτερη τάξη.
  14. Μετρήστε με στο μιλλιμετρέ χαρτί του πετάσματος το πάχος,  $b$ , του πρώτου κύκλου και την διαφορά ακτίνας πρώτου και δεύτερου,  $a$ .
  15. Από τις σχέσεις  $\Delta \nu_{1/2} = \frac{b}{a} (FSR)$ , και  $FSR = \frac{c}{2l}$ , βρείτε το πάχος της γραμμής  $\Delta \nu_{1/2}$ . Συγκρίνετε με την τιμή που βρήκατε προηγουμένως.

**Προσοχή:** Οι κροσσοί συμβολής που παρατηρείτε αλλάζουν όταν αλλάξει είτε η γεωμετρική είτε η οπτική απόσταση μεταξύ των δύο κατόπτρων. Η οπτική απόσταση μπορεί να μεταβληθεί π.χ. όταν μιλάτε, διότι τότε αυξομειώνεται η πίεση του αέρα που βρίσκεται μεταξύ των δύο κατόπτρων, άρα και ο δείκτης διάθλασης.

#### ΣΗΜΕΙΩΣΗ:

Ένα laser He-Ne αποτελείται από μια οπτική κοιλότητα, δηλαδή ένα Fabry-Perot, με κάτοπτρα συγκεκριμένης ανακλαστικότητας σε μια απόσταση και ένα ενεργό υλικό το οποίο έχει ένα φάσμα εκπομπής με ένα καθορισμένο εύρος ζώνης.

Η έξοδος του laser θα αποτελείται από τις συχνότητες του F-P που βρίσκονται στην περιοχή του φάσματος εκπομπής (Βλέπετε Σχήματα 1 και 2). Οι συχνότητες του laser απέχουν απόσταση που καθορίζεται από την απόσταση των κατόπτρων ( $\Delta \nu_{laser} = c / (2l_{laser})$ ), για  $\theta \approx 0$ ).

Οι συχνότητες του laser έχουν ένα εύρος που καθορίζεται από την ανακλαστικότητα των κατόπτρων του

$$laser R_{laser}. \text{ Έτσι } \Delta \nu_{1/2laser} = \frac{\Delta \nu_{laser}}{\mathcal{F}} \text{ όπου } \mathcal{F} = \frac{\pi \sqrt{R_{laser}}}{1 - R_{laser}} \text{ και } R_{laser} = \sqrt{R_{1laser} R_{2laser}}.$$

**Προσοχή!** Οι παραπάνω τύποι αναφέρονται στους καθρέφτες του laser και όχι στους καθρέφτες του F-P!

#### Βιβλιογραφία

- G.R. Fowles, “Introduction to Modern Optics”, DOVER, 1989
- F.L. Pedrotti S.J. and L. Fedrotti, “Introduction to optics”, Prentice Hall.
- H.J. Pain, “Φυσική των ταλαντώσεων και των κυμάτων”, κεφ. 10, Εκδόσεις Συμμετρία, 1993.

## 4. ΠΟΛΩΣΗ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ

### 1. Σκοπός

- Μελέτη καταστάσεων πόλωσης φωτός
- Μεταβολή της κατάστασης πόλωσης ηλεκτρομαγνητικού κύματος
  - Χρήση πολωτικών φίλτρων (διχρωϊσμός) – Νόμος του Malus
  - Χρήση πλακιδίων καθυστέρησης ( $\lambda/2$ ,  $\lambda/4$ ) (διπλοθλαστικότητα)
  - Γωνία Brewster – πόλωση από ανάκλαση

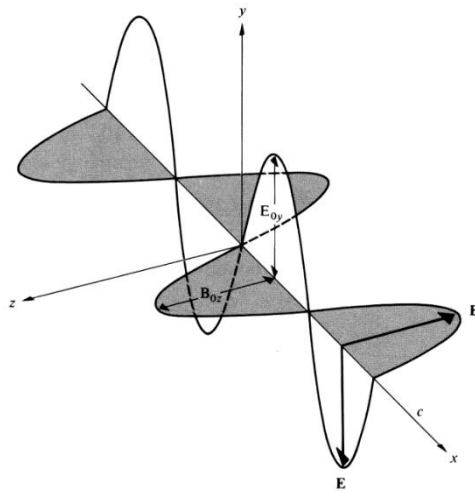
### 2. Θεωρία

#### Βασική προαπαιτούμενη γνώση

Serway, Physics for Scientists & Engineers, Τόμος ΙΙΙ, Κεφ. 38.6, (συμπεριλαμβανομένων των αντίστοιχων παραδειγμάτων και προβλημάτων).

#### 2.1 Εισαγωγικά

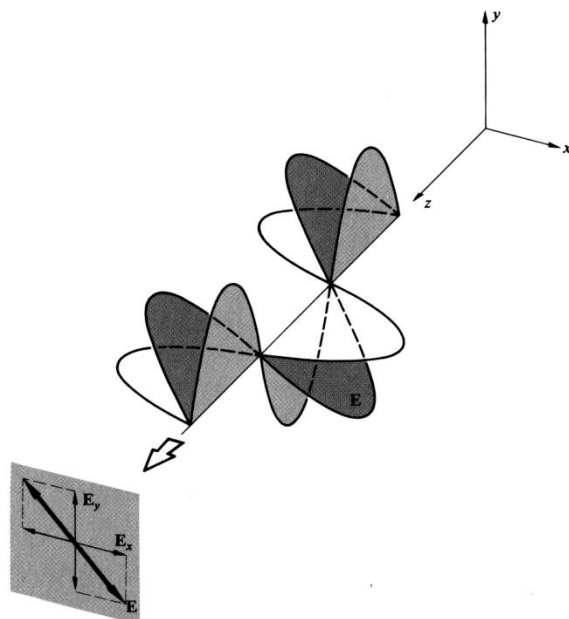
Είναι γνωστό ότι το φως και γενικά τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα **είναι εγκάρσια κύματα**, με το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο να ταλαντώνονται κάθετα μεταξύ τους και κάθετα προς την διεύθυνση διάδοσης (Σχήμα 1).



**Σχήμα 1:** Στιγμιότυπο Η-Μ κύματος που διαδίδεται κατά τον άξονα  $x$

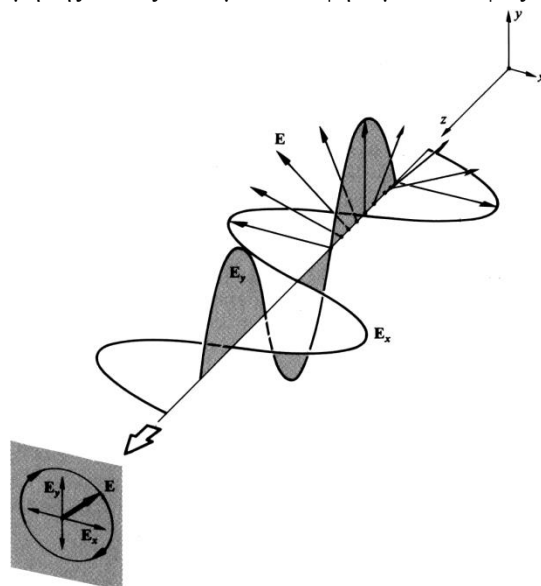
Βασική εκδήλωση της εγκαρσιότητας των ηλεκτρομαγνητικών (Η-Μ) κυμάτων είναι τα φαινόμενα **πόλωσης**, τα οποία δεν παρατηρούνται σε διαμήκη κύματα (όπου η ταλάντωση γίνεται παράλληλα προς την διεύθυνση διάδοσης). Τέτοια φαινόμενα θα μελετήσουμε στο πείραμα που ακολουθεί.

Το επίπεδο που ορίζεται από την διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου και από την διεύθυνση διάδοσης του Η-Μ κύματος λέγεται **επίπεδο πόλωσης ή ταλάντωσης**. Όταν το επίπεδο πόλωσης είναι πάντα παράλληλο προς το ίδιο σταθερό επίπεδο, τότε το Η-Μ κύμα ονομάζεται **γραμμικά ή επίπεδα πολωμένο** (βλ. Σχήμα 2). Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου ταλαντώνεται ημιτονοειδώς μεταξύ μέγιστης θετικής και ελάχιστης αρνητικής τιμής



**Σχήμα 2:** Γραμμικά ή επίπεδα πολωμένο φως.

Μία άλλη συνηθισμένη κατάσταση πόλωσης είναι η λεγόμενη **κυκλική πόλωση**, στην οποία το ηλεκτρικό πεδίο παραμένει χρονικά σταθερό ως προς το μέτρο του, ενώ η διεύθυνσή του μεταβάλλεται συνεχώς, έτσι ώστε η αιχμή του διανύσματος  $\vec{E}$  να διαγράφει –καθώς διαδίδεται το κύμα- μία έλικα με κυκλική διατομή (βλ. Σχήμα 3). Όταν η διατομή της έλικας είναι μία έλλειψη λέμε ότι το φως είναι ελλειπτικά πολωμένο.



**Σχήμα 3:** Κυκλικά πολωμένο φως.

Μία συνηθισμένη πηγή φωτός (π.χ. μία λάμπα πυρακτώσεως) περιλαμβάνει ένα πολύ μεγάλο αριθμό από ατομικά δίπολα – πομπούς, με τυχαίους προσανατολισμούς. Κάθε διεγερμένο άτομο εκπέμπει ένα πολωμένο κυματοσυρμό διάρκειας περίπου  $10^{-8}$  sec. Όλα τα εκπεμπόμενα κύματα της ίδιας συχνότητας συντίθενται για να σχηματίσουν ένα πολωμένο κύμα διάρκειας  $10^{-8}$  sec. Νέοι κυματοσυρμοί εκπέμπονται διαρκώς και η πόλωση αλλάζει με ένα εντελώς απρόβλεπτο τρόπο. Εάν αυτές οι αλλαγές της κατάστασης



πόλωσης αλλάζουν τόσο γρήγορα ώστε να μην μπορούμε να διακρίνουμε μία συγκεκριμένη κατάσταση πόλωσης, λέμε ότι έχουμε **μη πολωμένο φως ή φυσικό φως**.

## 2.2 Μαθηματική αναπαράσταση του πολωμένου φωτός – διανύσματα Jones

Ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα έχει τη μορφή

$$\vec{E} = \vec{E}_o \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi) \quad (1)$$

Το διάνυσμα  $\vec{E}_o$  δίνει το πλάτος και την κατεύθυνση ταλάντωσης του πεδίου,  $\vec{k}$  είναι το κυματόνισμα με μέτρο ίσο προς  $2\pi/\lambda$ ,  $\omega (=2\pi\nu)$  είναι η κυκλική συχνότητα και  $\phi$  η φάση του κύματος. Το διάνυσμα θέσης είναι

$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z \quad (2)$$

και το κυματόνισμα

$$\vec{k} = \hat{i}k_x + \hat{j}k_y + \hat{k}k_z \quad (3)$$

όπου  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  τα μοναδικά διανύσματα των αξόνων x,y,z και

$$|\vec{k}| = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2} \quad (4)$$

Επειδή ισχύει η σχέση του Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (5)$$

μπορούμε τη σχέση (1) να την εκφράσουμε και ως

$$\vec{E} = \vec{E}_o e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)} \quad (6)$$

όπου νοείται ότι στο τέλος των οποιωνδήποτε πράξεων κρατάμε το πραγματικό τμήμα του μιγαδικού αριθμού. Αυτό γίνεται για να διευκολύνουμε τους υπολογισμούς. Προφανώς, έχουμε ότι

$$\cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi) = \text{Re} \left[ e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)} \right] \quad (7)$$

όπου το Re σημαίνει ότι παίρνουμε το πραγματικό τμήμα της μιγαδικής συνάρτησης.

Έστω μια ακτίνα πολωμένου φωτός με ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E}$  που διαδίδεται κατά τον άξονα +z. Τότε το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου μπορεί να αναλυθεί σε δύο ορθογώνιες συνιστώσες  $E_x$  και  $E_y$  και ταλαντώσεις στο  $E$  αντιστοιχούν σε ταλαντώσεις των  $E_x$  και  $E_y$ . Σύμφωνα με την 2.2-6 θα έχουμε ότι

$$E_x = E_{ox} e^{i(kz - \omega t + \phi_x)} \quad (8)$$

$$E_y = E_{oy} e^{i(kz - \omega t + \phi_y)}$$

και χρησιμοποιώντας τα μοναδιαία διανύσματα  $\hat{i}$  και  $\hat{j}$ ,

$$\vec{E} = \hat{i}E_x + \hat{j}E_y \quad (9)$$

Δηλαδή

$$\vec{E} = [\hat{i}E_{ox} e^{i\phi_x} + \hat{j}E_{oy} e^{i\phi_y}] e^{i(kz - \omega t)} \quad (10)$$

ή

$$\vec{E} = \vec{E}_o e^{i(kz - \omega t)} \quad (11)$$



όπου το  $\tilde{E}_o$  είναι το λεγόμενο **μυγαδικό πλάτος** του πολωμένου φωτός.

Η κατάσταση πόλωσης του Η-Μ κύματος καθορίζεται πλήρως από το σχετικό πλάτος και τις φάσεις των δύο συνιστωσών. **Αρκεί επομένως να εξετάσουμε το μυγαδικό αυτό πλάτος του κύματος, που μπορεί να γραφεί υπό μορφή πίνακα δύο στοιχείων, του λεγόμενου διανύσματος Jones**

$$\tilde{E}_o = \begin{bmatrix} \tilde{E}_{ox} \\ \tilde{E}_{oy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{ox}e^{i\phi_x} \\ E_{oy}e^{i\phi_y} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Στη συνέχεια θα καθορίσουμε τα διανύσματα Jones για διάφορες καταστάσεις πόλωσης.

• **Γραμμική πόλωση**

Όπως προαναφέρθηκε, γραμμική πόλωση έχουμε όταν η συνισταμένη των  $E_x$  και  $E_y$  σχηματίζει σταθερή γωνία με τον άξονα των  $x$ . Θα εξετάσουμε πρώτα την απλή περίπτωση γραμμικής πόλωσης κατά μήκος του άξονα  $x$ . Προφανώς, σε αυτή την περίπτωση  $E_x=A$ , όπου  $A$  το πλάτος του πεδίου,  $E_y=0$ . Επομένως το αντίστοιχο διάνυσμα Jones θα είναι

$$\tilde{E}_o = A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

όπου θέσαμε  $\phi_x = \phi_y = 0$ , εφόσον υπάρχει μόνο μία συνιστώσα.

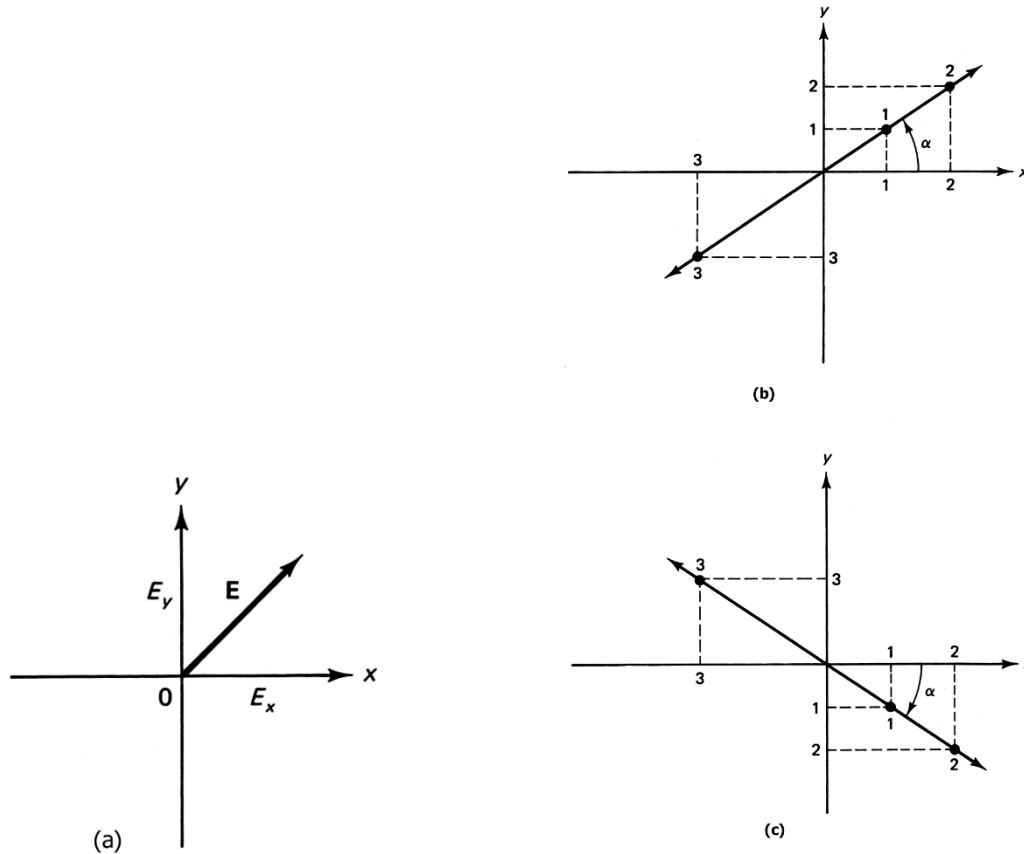
Όμοια, γραμμική πόλωση κατά μήκος του άξονα  $y$ , εκφράζεται από το διάνυσμα Jones

$$\tilde{E}_o = A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Εύκολα μπορούμε να γενικεύσουμε τα παραπάνω, για την περίπτωση γραμμικά πολωμένου φωτός κατά μία τυχαία γωνία  $a$ , ως προς τον άξονα των  $x$ . Είναι προφανές από το Σχήμα 4c ότι στην περίπτωση αυτή θα έχουμε

$$\tilde{E}_o = \begin{bmatrix} \tilde{E}_{ox}e^{i\phi_x} \\ \tilde{E}_{oy}e^{i\phi_y} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \cos a \\ \sin a \end{bmatrix} \quad (15)$$

όπου η διαφορά φάσης ( $\Delta\phi = \phi_y - \phi_x$ ) μεταξύ των δύο συνιστωσών έχει ληφθεί ίση με μηδέν (ισοδύναμα, η διαφορά φάσης θα μπορούσε να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του  $2\pi$ ). Σε αυτή την περίπτωση η πόλωση της συνισταμένης είναι στο πρώτο ή τρίτο τεταρτημόριο. Είναι προφανές ότι τότε οι δύο ορθογώνιες συνιστώσες φθάνουν ταυτόχρονα την μέγιστή τους τιμή,  $+A$ , και περνούν ταυτόχρονα από το μηδέν. Εάν η διαφορά φάσης είναι  $\pi$  ή περιττό πολλαπλάσιο του  $\pi$ , τότε προφανώς έχουμε πάλι γραμμική πόλωση, αλλά η συνισταμένη βρίσκεται στο δεύτερο ή τέταρτο τεταρτημόριο (και οι δύο συνιστώσες περνούν ταυτόχρονα από το μηδέν, αλλά όταν η μία συνιστώσα φθάνει στο μέγιστό της,  $+A$ , η άλλη παίρνει την ελάχιστη τιμή της,  $-A$ ).



**Σχήμα 4** Παράσταση του πεδίου  $\vec{E}$  που διαδίδεται στον άξονα  $+z$ . (a) Οι ταλαντώσεις του διανύσματος  $\vec{E}$  είναι ισοδύναμες με ταλαντώσεις των συνιστωσών  $E_x$  και  $E_y$ . (b) Ταλαντώσεις των συνιστωσών με διαφορά φάσης  $0^\circ$ , ή ακέραιο πολλαπλάσιο του  $2\pi$ , προκαλούν ταλάντωση του  $\vec{E}$  στο πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο. (c) Ταλαντώσεις με διαφορά φάσης  $\pi$ , ή περιττό πολλαπλάσιο του  $\pi$ , παράγουν γραμμικά πολωμένο φως με το διάνυσμα  $\vec{E}$  στο δεύτερο και τέταρτο τεταρτημόριο.

Όπως προκύπτει από το Σχήμα 4c, η γωνία  $\alpha$  δίνεται από την σχέση

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{E_{oy}}{E_{ox}}\right) \quad (16)$$

Συνήθως τα διανύσματα Jones που χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν την κατάσταση πόλωσης, έχουν μέτρο ίσο με την μονάδα, δηλ. είναι **κανονικοποιημένα**. Θέτοντας  $A=1$ , στις εξισώσεις (2.2-13), (2.2-14) και (2.2-15), παίρνουμε τα κανονικοποιημένα διανύσματα Jones, που αντιστοιχούν στις διάφορες καταστάσεις γραμμικής πόλωσης.

- **Κυκλική πόλωση**

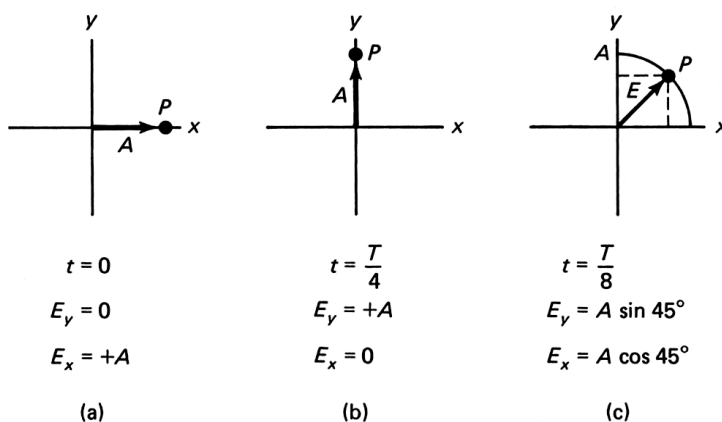
Γενικά, επειδή σημασία στην πρόσθεση των συνιστωσών έχει η διαφορά φάσης και όχι οι απόλυτες τιμές, μπορούμε να θέσουμε

$$\begin{aligned}\phi_x &= 0 \\ \varepsilon &= \phi_y - \phi_x = \phi_y\end{aligned}\quad (17)$$

οπότε ανάλογα με το πρόσημο του  $\varepsilon$  να γνωρίζουμε ποια συνιστώσα προηγείται. Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει καθυστέρηση της αντίστοιχης συνιστώσας. Έτσι έχουμε σύμφωνα με την (12) και την (17)

$$\begin{aligned}\tilde{E}_x &= E_{ox}e^{-i\omega t} \\ \tilde{E}_y &= E_{oy}e^{-(i\omega t - \varepsilon)}\end{aligned}\quad (18)$$

Όπως προκύπτει και από προσεκτική μελέτη του Σχήματος 5, κυκλική πόλωση της συνισταμένης ταλάντωσης έχουμε όταν η διαφορά φάσης μεταξύ των ορθογώνιων συνιστωσών είναι  $\varepsilon = \pi/2$  (ή περιττό πολλαπλάσιο του  $\pi/2$ ), και  $E_{ox} = E_{oy} = A$ .



**Σχήμα 5.** Ταλαντώσεις του  $E$  για ίσα πλάτη και για διαφορά φάσης  $90^\circ$  σε διάφορες χρονικές στιγμές της περιόδου  $T$ .

Οπότε από την (18) προκύπτει ότι

$$\tilde{E}_o = \begin{bmatrix} E_{ox}e^{i\phi_x} \\ E_{oy}e^{i\phi_y} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ e^{i\pi/2} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}\quad (19)$$

Το πλάτος του διανύσματος είναι  $1^2 + |i|^2 = 1 + 1 = 2$ , άρα κάθε συνιστώσα διαιρείται δια  $\sqrt{2}$  για να έχουμε την κανονικοποιημένη μορφή του αντίστοιχου διανύσματος. Έτσι το διάνυσμα Jones για κυκλικά πολωμένο φως είναι

$$\begin{aligned}\tilde{E}_o &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \text{ για αριστερόστροφη κυκλική πόλωση}^5 \\ \tilde{E}_o &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \text{ για δεξιόστροφη κυκλική πόλωση}^6\end{aligned}\quad (20)$$

<sup>5</sup> η x συνιστώσα καθυστερεί ως προς την y συνιστώσα

<sup>6</sup> η y συνιστώσα καθυστερεί ως προς την x συνιστώσα

• **Ελλειπτική πόλωση**

Για την περίπτωση του ελλειπτικά πολωμένου φωτός το  $E_{ox} \neq E_{oy}$ , ενώ η διαφορά φάσης παραμένει ίση με  $\varepsilon = \pi/2$  (ή περιττό πολλαπλάσιο του  $\pi/2$ ), οπότε το διάνυσμα Jones γίνεται

$$\tilde{E}_o = \begin{bmatrix} E_{ox} e^{i\phi_x} \\ E_{oy} e^{i\phi_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ b e^{i\varepsilon} \end{bmatrix}$$

όπου θέσαμε  $\phi_x = 0$ ,  $E_{ox} = A$  και  $E_{oy} = b$ .

Επειδή

$$b e^{i\varepsilon} = b(\cos \varepsilon + i \sin \varepsilon) = B + iC = b \cos \varepsilon + i b \sin \varepsilon$$

έχουμε

$$\tilde{E}_o = \begin{bmatrix} A \\ B + iC \end{bmatrix} \quad (21)$$

Για να προκύψει κανονικοποιημένο διάνυσμα, πρέπει σε αυτή την περίπτωση να πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία του πίνακα με το  $1/\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ .

Στην περίπτωση που περιγράψαμε εδώ η  $y$  συνιστώσα προηγείται της  $x$  συνιστώσας, επομένως πρόκειται για αριστερόστροφα ελλειπτικά πολωμένο φως.

Εν περιλήψει έχουμε

$$\tilde{E}_o = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \begin{bmatrix} A \\ B + iC \end{bmatrix} \quad \text{για αριστερόστροφη ελλειπτική πόλωση} \quad (21a)$$

$$\tilde{E}_o = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \begin{bmatrix} A \\ B - iC \end{bmatrix} \quad \text{για δεξιόστροφη ελλειπτική πόλωση}$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι η αιχμή του  $\tilde{E}_o$  περιγράφει έλλειψη που δίνεται από την εξίσωση (βλ. Σχήμα 6)

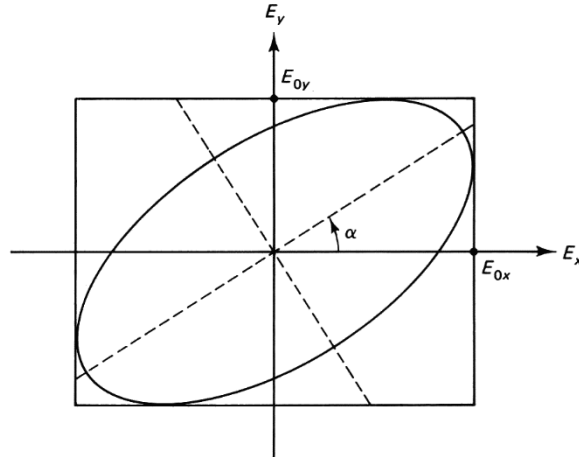
$$\left( \frac{E_x}{E_{ox}} \right)^2 + \left( \frac{E_y}{E_{oy}} \right)^2 - 2 \frac{E_x}{E_{ox}} \frac{E_y}{E_{oy}} \cos \varepsilon = \sin^2 \varepsilon \quad (22)$$

Η γωνία  $\alpha$  που σχηματίζει ο μεγάλος άξονας της έλλειψης με τον άξονα  $x$  δίνεται από τη σχέση

$$\tan 2\alpha = \frac{2E_{ox}E_{oy} \cos \varepsilon}{E_{ox}^2 - E_{oy}^2} \quad (23)$$

όπου

$$\begin{aligned} E_{ox} &= A \\ E_{oy} &= \sqrt{B^2 + C^2} \\ \varepsilon &= \tan^{-1} \left( \frac{C}{B} \right) \end{aligned} \quad (24)$$



**Σχήμα 6:** Ελλειπτικά πολωμένο φως προσανατολισμένο κατά γωνία  $\alpha$  ως προς τον άξονα των  $x$

**Παράδειγμα:** Αναλύστε το διάνυσμα Jones που δίνεται από τον πίνακα  $\begin{bmatrix} 3 \\ 2+i \end{bmatrix}$  για να δείξετε ότι είναι ελλειπτικά πολωμένο.

Έχουμε από την (21), την (23) και την (24) ότι

$$\varepsilon = \tan^{-1}\left(\frac{C}{B}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 26.6^\circ$$

$$E_{ox} = 3, E_{oy} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2E_{ox}E_{oy} \cos \varepsilon}{E_{ox}^2 - E_{oy}^2} = 35.8^\circ$$

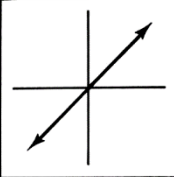
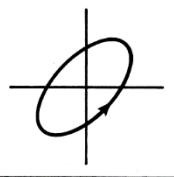
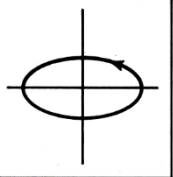
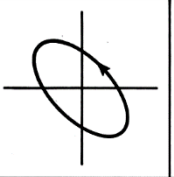
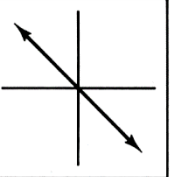
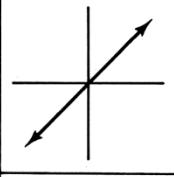
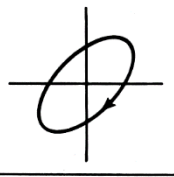
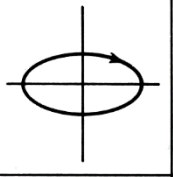
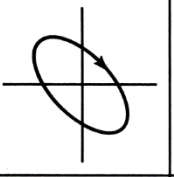
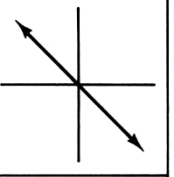
Επακριβώς η έλλειψη περιγράφεται (σύμφωνα με την 22) από την σχέση

$$\frac{E_x^2}{9} + \frac{E_y^2}{5} - 0.267E_xE_y = 0.2$$

Στην πραγματικότητα και η γραμμική πόλωση και η κυκλική πόλωση είναι ειδικές περιπτώσεις της ελλειπτικής πόλωσης, όπως φαίνεται και από το Σχήμα 7, στο οποίο δίνονται τα γνωστά σχήματα Lissajous<sup>7</sup>, συναρτήσει της διαφοράς φάσης  $\Delta\varphi = \varphi_y - \varphi_x$ , για την γενική περίπτωση που  $E_x \neq E_y$ .

Στον Πίνακα 1 δίνεται ένας κατάλογος των διανυσμάτων Jones για γραμμικά, κυκλικά και ελλειπτικά πολωμένο φως για δεξιόστροφη και αριστερόστροφη κίνηση του διανύσματος της πόλωσης

<sup>7</sup> που προκύπτουν από την σύνθεση των ορθογώνιων συνιστωσών για να πάρουμε την συνισταμένη ταλάντωση

				
$\Delta\phi = 0^\circ$	$\Delta\phi = 45^\circ$	$\Delta\phi = 90^\circ$	$\Delta\phi = 135^\circ$	$\Delta\phi = 180^\circ$
				
$\Delta\phi = 360^\circ$	$\Delta\phi = \begin{cases} -45^\circ \\ 315^\circ \end{cases}$	$\Delta\phi = \begin{cases} -90^\circ \\ 270^\circ \end{cases}$	$\Delta\phi = \begin{cases} -135^\circ \\ 225^\circ \end{cases}$	$\Delta\phi = \pm 180^\circ$

**Σχήμα 7.** Σχήματα Lissajous για συγκεκριμένες διαφορές φάσης,  $\Delta\phi = \phi_y - \phi_x$ , των συνιστωσών  $E_x$  και  $E_y$  για τη γενική περίπτωση  $E_{ox} \neq E_{oy}$ . Για  $E_{ox} = E_{oy}$  έχουμε κύκλο αντί για έλλειψη.

### Ασκήσεις-Ερωτήσεις Θεωρίας

- Αποδείξτε τις σχέσεις 22, 23, και 24.
- Γράψτε τα κανονικοποιημένα διανύσματα Jones για τα ακόλουθα κύματα και περιγράψτε πλήρως την κατάσταση πόλωσης στην κάθε περίπτωση.

(α)  $\vec{E} = \hat{i}E_o \cos(kz - \omega t) - \hat{j}E_o \cos(kz - \omega t)$

(β)  $\vec{E} = \hat{i}E_o \sin 2\pi\left(\frac{z}{\lambda} - ft\right) + \hat{j}E_o \sin 2\pi\left(\frac{z}{\lambda} - ft\right)$

(γ)  $\vec{E} = \hat{i}E_o \cos(kz - \omega t) + \hat{j}E_o \cos(kz - \omega t + \frac{\pi}{2})$

- Περιγράψτε πλήρως την κατάσταση πόλωσης των ακόλουθων κυμάτων (συμπεριλάβετε και το πλάτος και την διεύθυνση διάδοσης)

(α)  $\vec{E} = 2E_o \hat{i} e^{i(kz - \omega t)}$

(β)  $\vec{E} = E_o (3\hat{i} + 4\hat{j}) e^{i(kz - \omega t)}$

(γ)  $\vec{E} = 5E_o (\hat{i} - \hat{j}) e^{i(kz + \omega t)}$

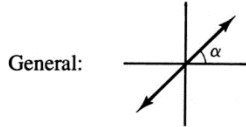
(Προσέξτε την διαφορά μεταξύ του μοναδιαίου διανύσματος  $\hat{i}$  και του φανταστικού αριθμού  $i = \sqrt{-1}$ ).

- Ποιά είναι η κατάσταση πόλωσης που περιγράφεται από τα ακόλουθα διανύσματα Jones:

(α)  $\begin{bmatrix} 3i \\ i \end{bmatrix}$ , (β)  $\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$ , (γ)  $\begin{bmatrix} 4i \\ 5 \end{bmatrix}$ , (δ)  $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ , (ε)  $\begin{bmatrix} 2 \\ 2i \end{bmatrix}$ , (στ)  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ , (ζ)  $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 + 8i \end{bmatrix}$ , (η)  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3e^{i\pi/3} \end{bmatrix}$

**Πίνακας 1.** Περίληψη διανυσμάτων Jones

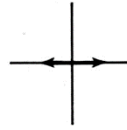
**I. Linear Polarization** ( $\Delta\phi = m\pi$ )



$$E_0 = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}$$

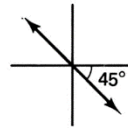
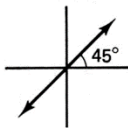
Vertical:  $E_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Horizontal:  $E_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

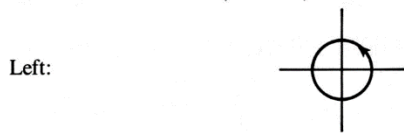


At  $+45^\circ$ :  $E_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

At  $-45^\circ$ :  $E_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$



**II. Circular Polarization** ( $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$ )

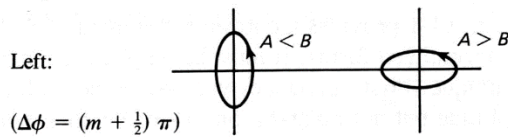


$$E_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

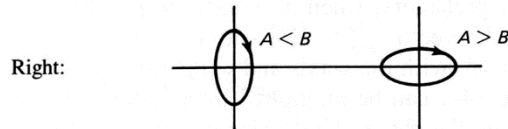


$$E_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

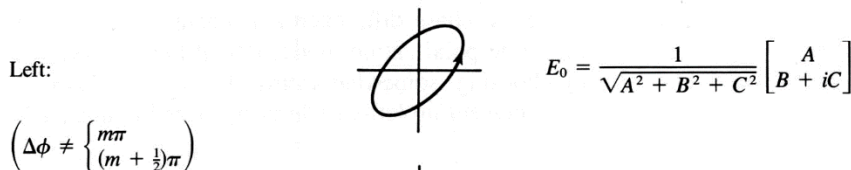
**III. Elliptical Polarization**



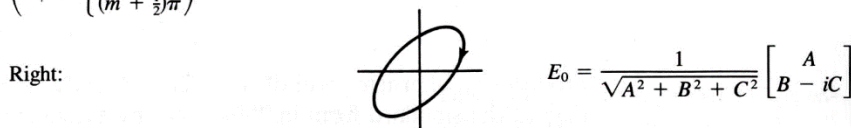
$$E_0 = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \begin{bmatrix} A \\ iB \end{bmatrix}$$



$$E_0 = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \begin{bmatrix} A \\ -iB \end{bmatrix}$$



$$E_0 = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \begin{bmatrix} A \\ B + iC \end{bmatrix}$$



$$E_0 = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \begin{bmatrix} A \\ B - iC \end{bmatrix}$$

### 2.3 Μαθηματική αναπαράσταση πολωτικών στοιχείων – πίνακες Jones

Υπάρχουν διάφορα οπτικά στοιχεία που επιτρέπουν την διάδοση του φωτός μέσα από αυτά, μεταβάλλοντας, όμως, την κατάσταση πόλωσής του. Οι φυσικοί μηχανισμοί που υφίστανται στην δράση αυτών των οπτικών στοιχείων θα εξεταστούν στο επόμενο κεφάλαιο. Εδώ, απλώς θα κατατάξουμε τα συστήματα αυτά σε τρεις κατηγορίες ανάλογα με το είδος της μεταβολής που προκαλούν στην κατάσταση πόλωσης του διαρχομένου φωτός:

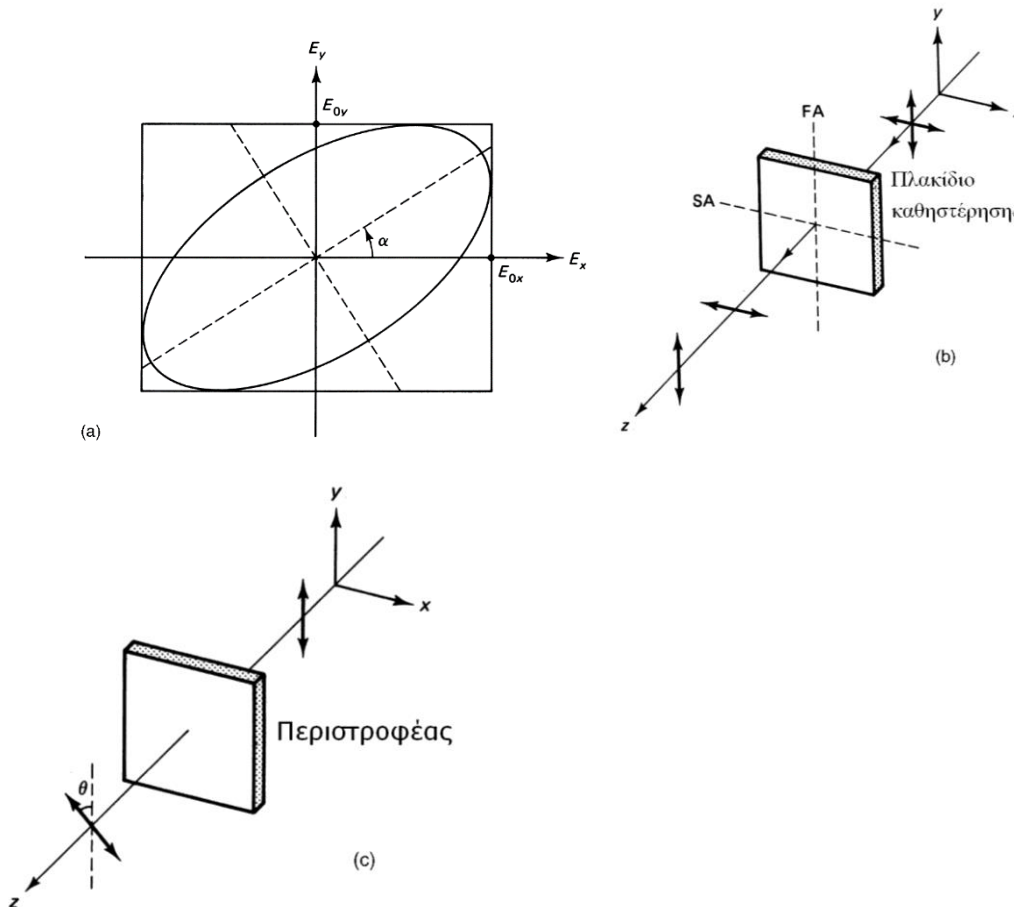
(i) **Γραμμικός Πολωτής (linear polarizer):** επιτρέπει μόνο την διέλευση φωτός που είναι πολωμένο παράλληλα προς τον λεγόμενο άξονα διέλευσης (Transmission Axis, TA). Βλ. Σχήμα 8a.

(ii) **Πλακίδιο καθυστέρησης (retarder):** εισάγει διαφορά φάσης μεταξύ των συνιστωσών  $E_{ox}$  και  $E_{oy}$ . Τα εν λόγω πλακίδια έχουν δύο άξονες, έναν κανονικό (FA, fast axis) και ένα μη κανονικό (SA, slow axis) λόγω διαφοράς του δείκτη διάθλασης στους δύο άξονες. Το πλακίδιο που προκαλεί διαφορά φάσης  $\Delta\phi=90^\circ$  αποκαλείται **πλακίδιο  $\lambda/4$**  και αυτό που προκαλεί διαφορά φάσης  $\Delta\phi=180^\circ$  ονομάζεται **πλακίδιο  $\lambda/2$** . Βλ. Σχήμα 8b.

Οι ονομασίες αυτές οφείλονται στο ότι η συνολική διαφορά φάσης μεταξύ των  $E_{ox}$  και  $E_{oy}$  εξαρτάται από το πάχος του πλακιδίου  $d$

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} d \text{ αν } d = \frac{\lambda}{4}, \text{ τότε } \Delta\phi = \frac{\pi}{2} = 90^\circ \text{ αν } d = \frac{\lambda}{2}, \text{ τότε } \Delta\phi = \pi = 180^\circ \quad (25)$$

(iii) **Περιστροφέας (rotator):** είναι μία συσκευή που περιστρέφει το επίπεδο ταλάντωσης γραμμικά πολωμένου φωτός κατά μία συγκεκριμένη γωνία Βλ. Σχήμα 8c.





**Σχήμα 8:** Σχηματική απεικόνιση της δράσης (a) γραμμικού πολωτή, (b) πλακιδίου καθυστέρησης, και (c) περιστροφέα.

Θέλουμε, τώρα, να περιγράψουμε μαθηματικά έναν πολωτή στα πλαίσια του φορμαλισμού που εφαρμόσαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Είναι προφανές ότι χρειαζόμαστε κατάλληλους πίνακες (2x2), που όταν επιδράσουν σε ένα διάνυσμα Jones (2x1) του πολωμένου φωτός (πολλαπλασιασμός πινάκων) θα επιφέρουν το αναμενόμενο αποτέλεσμα, δηλ. ένα διάνυσμα Jones που θα περιγράφει σωστά την προκύπτουσα κατάσταση πόλωσης.

• **Γραμμικός πολωτής**

Έστω κατακόρυφα γραμμικά πολωμένο φως που διέρχεται από ένα γραμμικό πολωτή με άξονα διέλευσης (ΑΔ) επίσης κατακόρυφο. Προφανώς περιμένουμε το φως να διέλθει χωρίς καμία μεταβολή στην κατάσταση πόλωσής του. Επομένως, ο πίνακας του πολωτή αυτού θα πρέπει να ικανοποιεί την σχέση

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Οι αλγεβρικές εξισώσεις που προκύπτουν είναι

$$b=0 \text{ και } d=1.$$

Αν τώρα προσπέσει οριζόντια γραμμικά πολωμένο φως στον ίδιο γραμμικό πολωτή, δεν θα διέλθει καθόλου φως και θα έχουμε

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

συνεπώς

$$a=0 \text{ και } c=0.$$

Επομένως, ο πίνακας για ένα πολωτή με τον άξονα διέλευσης κατακόρυφο είναι

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ γραμμικός πολωτής με κατακόρυφο ΑΔ (ΤΑ)}$$

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε εύκολα να προσδιορίσουμε τον πίνακα που αντιστοιχεί στην γενική περίπτωση γραμμικού πολωτή με ΑΔ να σχηματίζει μία τυχαία γωνία  $\theta$  με τον άξονα των x.

$$M = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (28)$$

• **Πλακίδια Καθυστέρησης**

Στην περίπτωση των πλακιδίων καθυστέρησης, ζητάμε ένα πίνακα που να μετατρέπει το  $E_{0x}e^{i\phi_x}$  σε  $E_{0x}e^{i\phi_x + \varepsilon_x}$  και το  $E_{0y}e^{i\phi_y}$  σε  $E_{0y}e^{i\phi_y + \varepsilon_y}$ .

Είναι προφανές ότι ένας τέτοιος πίνακας θα έχει την γενική μορφή

$$M = \begin{bmatrix} e^{i\varepsilon_x} & 0 \\ 0 & e^{i\varepsilon_y} \end{bmatrix} \quad (29)$$

ούτως ώστε

$$\begin{bmatrix} e^{i\varepsilon_x} & 0 \\ 0 & e^{i\varepsilon_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{0x}e^{i\phi_x} \\ E_{0y}e^{i\phi_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{0x}e^{i(\phi_x + \varepsilon_x)} \\ E_{0y}e^{i(\phi_y + \varepsilon_y)} \end{bmatrix}$$

που είναι το επιθυμητό αποτέλεσμα. Είναι κατανοητό ότι τα  $\varepsilon_x$  και  $\varepsilon_y$  μπορεί να είναι θετικές ή αρνητικές ποσότητες. Παραδείγματος χάρη, ας εξετάσουμε την περίπτωση ενός πλακιδίου  $\lambda/4$ , για το οποίο  $|\Delta\varepsilon| = \pi/2$ . Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, όταν  $\varepsilon_y - \varepsilon_x = \pi/2$  (όταν ο άξονας βραδείας

διέλευσης  $-AB\Delta$ - είναι κατακόρυφος), και όταν  $\varepsilon_x - \varepsilon_y = \pi/2$  (όταν ο  $AB\Delta$  είναι οριζόντιος). Στην πρώτη περίπτωση,  $\varepsilon_x = -\pi/4$  και  $\varepsilon_y = +\pi/4$ . Φυσικά υπάρχει άπειρος αριθμός τιμών που δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα, δηλ. ο πίνακας Jones που περιγράφει ένα συγκεκριμένο πολωτή δεν είναι μοναδικός (όπως συμβαίνει και με τα διανύσματα Jones). Για την συγκεκριμένη επιλογή τιμών των  $\varepsilon_x$  και  $\varepsilon_y$ , έχουμε τον ακόλουθο πίνακα:

$$M = \begin{bmatrix} e^{-i\pi/4} & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix} = e^{-i\pi/4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \quad \text{πλακίδιο } \lambda/4, AB\Delta \text{ κατακόρυφος} \quad (30)$$

Όμοια, όταν  $\varepsilon_x > \varepsilon_y$ ,

$$M = e^{i\pi/4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \quad \text{πλακίδιο } \lambda/4, AB\Delta \text{ οριζόντιος} \quad (31)$$

Αντίστοιχους πίνακες μπορούμε εύκολα να γράψουμε για πλακίδια  $\lambda/2$ ,  $\lambda/8$  κ.ο.κ. (βλ. Πίνακα 2).

### • Περιστροφείς

Ένας περιστροφέας στρέφει το επίπεδο πόλωσης γραμμικά πολωμένου φωτός από μία αρχική γωνία, έστω  $\theta$ , στην γωνία  $\theta+\beta$ . Δηλαδή,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta + \beta) \\ \sin(\theta + \beta) \end{bmatrix}$$

συνεπώς,

$$\begin{aligned} a \cos \theta + b \sin \theta &= \cos(\theta + \beta) \\ c \cos \theta + d \sin \theta &= \sin(\theta + \beta) \end{aligned}$$

οπότε, τελικά

$$M = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \quad \text{για περιστροφή γωνίας } \beta \quad (32)$$

**Πίνακας 2.** Πίνακες Jones για γραμμικούς πολωτές, πλακίδια καθυστέρησης και περιστροφής.

**I. Linear polarizers**

TA horizontal  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$     TA vertical  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$     TA at 45° to horizontal  $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

**II. Phase retarders**

General  $\begin{bmatrix} e^{i\epsilon_x} & 0 \\ 0 & e^{i\epsilon_y} \end{bmatrix}$

QWP, SA vertical  $e^{-i\pi/4}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$     QWP, SA horizontal  $e^{i\pi/4}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$

HWP, SA vertical  $e^{-i\pi/2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$     HWP, SA horizontal  $e^{i\pi/2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

**III. Rotator**

Rotator  $(\theta \rightarrow \theta + \beta)$   $\begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}$

Στην περίπτωση που χρησιμοποιούνται περισσότερα του ενός πολωτικά στοιχεία, το τελικό αποτέλεσμα προκύπτει πολλαπλασιάζοντας τους πίνακες των στοιχείων κατά την σειρά που έρχονται σε επαφή με τη δέσμη του φωτός. Δηλ. αν ένα διάνυσμα Jones  $V$  διέρχεται κατά σειρά από πολωτές που περιγράφονται από τους πίνακες  $M_1, M_2, \dots, M_m$ , τότε  $(M_m \dots M_2 M_1)V = M_S V$ .

**Παράδειγμα:** Αριστερόστροφο κυκλικά πολωμένο φως διέρχεται από πλακίδιο  $\lambda/8$ . Να βρεθεί το νέο διάνυσμα στην έξοδο πλακιδίου.

Η καθυστέρηση φάσης που επιβάλει το πλακίδιο είναι

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{8} = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

Σύμφωνα με τον γενικό πίνακα για το πλακίδιο καθυστέρησης έχουμε

$$M = \begin{bmatrix} e^{i\epsilon_x} & 0 \\ 0 & e^{i\epsilon_y} \end{bmatrix}$$

όπου  $\epsilon_x$  είναι η αλλαγή που προκαλείται στο  $\phi_x$  και  $\epsilon_y$  είναι η αλλαγή που προκαλείται στο  $\phi_y$ . Αν θεωρήσουμε  $\epsilon_x=0$  τότε η  $\epsilon_y=45^\circ$  αντιστοιχεί στη σχετική διαφορά φάσης. Άρα

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix}$$

Το αριστερόστροφο κυκλικά πολωμένο φως δίνεται από το διάνυσμα  $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$

Άρα έχουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ ie^{i\pi/4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{i3\pi/4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i) \end{bmatrix}$$

που δηλώνει ότι έχουμε ένα ελλειπτικά πολωμένο φως. Από τις (21), (22) και την (23) έχουμε

$M = \begin{bmatrix} A \\ B + iC \end{bmatrix}$  με  $A=1$ ,  $B = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $C = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $E_{ox} = A = 1$ ,  $E_{oy} = \sqrt{B^2 + C^2} = 1$  και  $a = -45^\circ$   
(όπου  $a$  είναι η γωνία του μεγάλου άξονα της έλλειψης με τον άξονα  $x$ ).

### Ασκήσεις-Ερωτήσεις Θεωρίας

1. Γραμμικά πολωμένο φως του οποίου το ηλεκτρικό πεδίο σχηματίζει γωνία  $+30^\circ$  με τον άξονα των  $x$ , διαδίδεται μέσω ενός πλακιδίου  $\lambda/4$  με οριζόντιο τον άξονα βραδείας διάδοσης. Περιγράψτε την κατάσταση πόλωσης του προκύπτοντος κύματος.
2. Δείξτε ότι η επίδραση ενός πλακιδίου  $\lambda/2$  σε γραμμικά πολωμένο φως κατά γωνία  $a$ , είναι η στροφή του επιπέδου πόλωσης κατά  $2a$ .
3. Οριζόντια γραμμικά πολωμένο φως περνά από γραμμικό πολωτή που σχηματίζει γωνία  $+45^\circ$  (κατά την φορά των δεικτών του ρολογιού) με την κατακόρυφο, και εν συνεχεία περνά από πλακίδιο  $\lambda/4$  με οριζόντιο άξονα βραδείας διάδοσης. Ποιά η κατάσταση πόλωσης του προκύπτοντος κύματος.
4. Πώς μεταβάλλεται η κατάσταση πόλωσης κυκλικά πολωμένου φωτός όταν περάσει (α) από πλακίδιο  $\lambda/4$ , (β) από πλακίδιο  $\lambda/8$ .

### 2.4 Παραγωγή πολωμένου φωτός

Οποιαδήποτε αλληλεπίδραση του φωτός με ύλη της οποίας οι οπτικές ιδιότητες δεν είναι συμμετρικές εγκάρσια προς τον άξονα διάδοσης του κύματος, αποτελεί ένα μέσο παραγωγής πολωμένου φωτός.

Οι πιο σημαντικές φυσικές διαδικασίες που προκαλούν πόλωση είναι οι εξής:

- πόλωση λόγω επιλεκτικής απορρόφησης - *Διχρωισμός*
- πόλωση λόγω ανάκλασης από μια διηλεκτρική επιφάνεια
- πόλωση λόγω σκέδασης (που δεν εξετάζετε στο πείραμά σας)
- πόλωση λόγω ύπαρξης δύο δεικτών διάθλασης - *Διπλοθλαστικότητα*

Σε ξεχωριστό κεφάλαιο θα εξετασθεί η *οπτική ενεργότητα*, με την οποία μπορούμε μόνο να αλλάξουμε την κατάσταση πόλωσης *ήδη* πολωμένου φωτός.

#### • Πόλωση λόγω επιλεκτικής απορρόφησης - Διχρωισμός

Ένας διχρωικός πολωτής απορροφά επιλεκτικά φως που έχει πόλωση σε μια συγκεκριμένη κατεύθυνση και επιτρέπει τη διέλευση φωτός στην κάθετη διεύθυνση που αποκαλείται και *Άξονας Διάδοσης* (ΑΔ) του πολωτή [*Transmission Axis* (TA)]. Σε ένα ιδανικό πολωτή το προκύπτον φως είναι γραμμικά πολωμένο κατά την διεύθυνση ΑΔ (TA). Συνήθως, χρησιμοποιούμε δύο πολωτές σε σειρά, ένα για να πολώσουμε (πολωτής) και ένα για να αναλύσουμε το πολωμένο φως (αναλυτής). Η ένταση του φωτός που διέρχεται από τον αναλυτή ακολουθεί το νόμο του Malus

$$I(\theta) = I_o \cos^2 \theta \quad (33)$$

όπου  $\theta$  είναι η γωνία που σχηματίζουν οι ΑΔ (TA) των δύο πολωτών, και  $I_o$  η μέγιστη διερχόμενη ένταση.

Οι πολωτές αποτελούνται από μακρομόρια, τα οποία είναι διατεταγμένα παράλληλα προς μια κατεύθυνση. Ο πιο γνωστός διχρωικός απορροφητής για το ορατό φως είναι το γνωστό Polaroid Η-φίλμ, που εφευρέθηκε το 1938 από τον E.H. Land, ο οποίος παρατήρησε ότι όταν ένα διαφανές φύλλο πολυβινυλικής αλκοόλης θερμανθεί κάτω από εφελκυσμό, τα μακρά μόρια της ένωσης τείνουν να ευθυγραμμισθούν κατά την κατεύθυνση του εφελκυσμού. Στα ευθυγραμμισμένα μόρια εμφυτεύονται κατόπιν άτομα ιωδίου τα οποία παρέχουν ένα είδος "ελεύθερων ηλεκτρονίων" στο ευθυγραμμισμένο μόριο, δημιουργώντας έτσι ένα επίπεδο με ευθυγραμμισμένες μικρές βελόνες αγωγιμότητας. Επειδή τώρα τα ηλεκτρόνια μπορούν να κινηθούν μόνο προς μια κατεύθυνση, υπό την επίδραση ενός πεδίου με τυχαία πόλωση, το συνιστάμενο

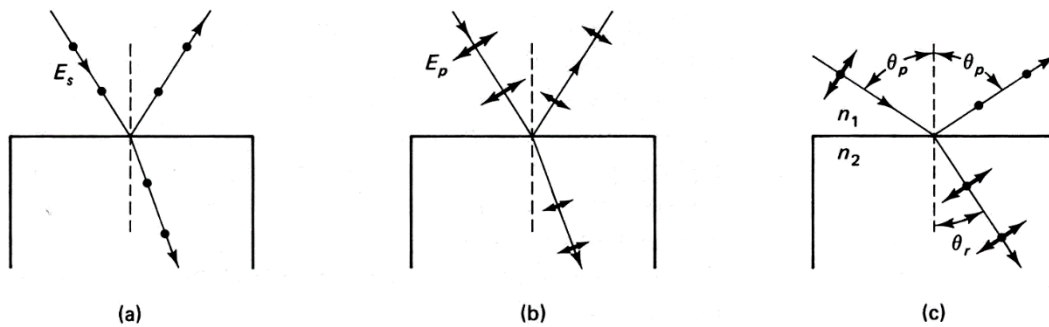
εκπεμπόμενο κύμα μακριά από το επίπεδο θα έχει -όπως αποδεικνύεται από την ηλεκτρομαγνητική θεωρία- πόλωση παράλληλη προς την κατεύθυνση των μακρομορίων. Η κάθετη προς την κατεύθυνση αυτή συνιστώσα δεν διαδίδεται, αλλά "απορροφάται" σύμφωνα με το νόμο

$$I = I_0 e^{-\alpha x} \quad (33^a)$$

όπου το  $\alpha$  είναι ο συντελεστής απορρόφησης και  $x$  το πάχος του πολωτή. Ένας καλός πολωτής έχει το  $\alpha$  σχεδόν ανεξάρτητο του μήκους κύματος. Το γνωστό φύλλο Polaroid H είναι λιγότερο αποτελεσματικό για το ιώδες, όσον αφορά την απορρόφηση  $\alpha$  και γι' αυτό το φως μετά τον αναλυτή εμφανίζει μια ιώδη απόχρωση στην περίπτωση πόλωσης και ανάλυσης πηγής που εκπέμπει σε όλο το ορατό φάσμα.

• **Πόλωση λόγω ανάκλασης από διηλεκτρική επιφάνεια**

Για να εξηγήσουμε τι συμβαίνει κατά την ανάκλαση φωτός από μια επιφάνεια, ας θεωρήσουμε το Σχήμα 9. Μια μη πολωμένη δέσμη μπορεί να αναπαρασταθεί από δύο ορθογώνιες συνιστώσες, εκ των οποίων η μία είναι κάθετη στο επίπεδο πρόσπτωσης (που ορίζεται από την διεύθυνση διάδοσης της δέσμης και την κάθετο στην επιφάνεια), που στο σχήμα 9 συμπίπτει με το επίπεδο της σελίδας και η άλλη είναι παράλληλη προς το επίπεδο αυτό. Η πρώτη συνιστώσα συμβολίζεται με  $E_s$  και η δεύτερη με  $E_p$ . Η  $E_s$ , αντιστοιχεί σ' αυτό που ονομάζεται *Transverse Electric (TE) mode*, επειδή στην περίπτωση αυτή το ηλεκτρικό πεδίο είναι κάθετο στο επίπεδο πρόσπτωσης. Η  $E_p$ , αντιστοιχεί σε ηλεκτρικό πεδίο παράλληλο προς το επίπεδο πρόσπτωσης, οπότε το μαγνητικό πεδίο είναι τώρα κάθετο στο επίπεδο αυτό, εξ ου και ο όρος *Transverse Magnetic (TM) mode*.



**Σχήμα 9.** Ανάκλαση του φωτός από μια διηλεκτρική επιφάνεια. (a) TE mode, (b) TM mode και (c) πόλωση σε γωνία Brewster.

Η ερμηνεία του φαινομένου της πόλωσης από ανάκλαση από διηλεκτρική επιφάνεια, συνδέεται με την παρουσία ηλεκτρονίων στο υλικό, τα οποία ανταποκρινόμενα στην προσπίπτουσα ακτινοβολία, εκπέμπουν ως δίπολα, δηλ. μόνο κάθετα στον άξονα κίνησης τους, και με πόλωση παράλληλη προς αυτόν τον άξονα.

Η συνεισφορά των συνιστωσών  $E_s$  και  $E_p$  φαίνεται στο Σχήμα 9(a) και (b). Η ένταση της ανακλώμενης δέσμης είναι συνάρτηση της γωνίας  $\theta_p$ , που σχηματίζει η προσπίπτουσα δέσμη με την κάθετο στη επιφάνεια, διότι τα ηλεκτρόνια κινούνται μόνο παράλληλα προς την επιφάνεια του υλικού και δεν μπορούν να εξέλθουν από αυτό. Άρα, όσο αυξάνει η γωνία  $\theta_p$ , τόσο η προβολή της  $E_p$  πάνω στην επιφάνεια μικραίνει, με αποτέλεσμα η συνεισφορά της στην ανάκλαση να ελαττώνεται. Το συμπέρασμα είναι ότι ενώ η συνεισφορά της συνιστώσας  $E_s$  δεν εξαρτάται από τη γωνία, η συνεισφορά της  $E_p$  εξαρτάται. Έτσι, μόνο ένα μέρος της συνιστώσας  $E_p$  θα εμφανισθεί στην ανακλώμενη δέσμη. Επειδή, λοιπόν, η ανακλώμενη δέσμη είναι κυρίως TE, η διαθλώμενη δέσμη θα είναι κυρίως TM, εφόσον το άθροισμά τους θα πρέπει να δίνει την αρχική δέσμη.

Είναι φανερό από την ανάλυση που προηγήθηκε, ότι όταν οι άξονες των διπόλων είναι παράλληλοι προς την ανακλώμενη ακτίνα, τότε η ανακλώμενη ακτίνα θα είναι γραμμικά πολωμένη (περιέχοντας μόνο την συνιστώσα  $E_s$ ). Αυτός ο μοναδικός προσανατολισμός προκύπτει όταν η ανακλώμενη και η διαθλώμενη δέσμη είναι κάθετες μεταξύ τους. Η γωνία πρόσπτωσης  $\theta_p$ , για την οποία συμβαίνει αυτό λέγεται *γωνία πόλωσης* ή *γωνία Brewster* (σχήμα 9c).

Από το νόμο του Snell

$$n_1 \sin \theta_p = n_2 \sin \theta_r \quad (34)$$

και τη σχέση

$$\theta_r = 90 - \theta_p$$

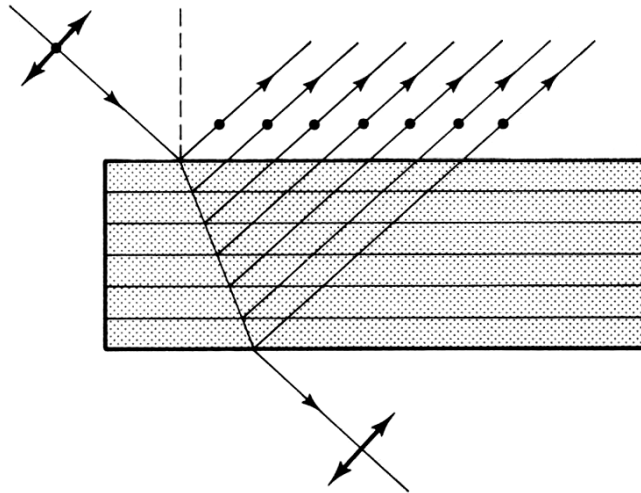
έχουμε για τη γωνία Brewster

$$\theta_p = \tan^{-1} \frac{n_2}{n_1} \quad (35)$$

Γωνία Brewster υπάρχει και όταν το φως ταξιδεύει από το υλικό με τον μεγαλύτερο δείκτη διάθλασης προς το υλικό με τον μικρότερο δείκτη, όπως μπορεί να δειχθεί εύκολα, και είναι συμπληρωματική της γωνίας Brewster που προκύπτει όταν το φως ταξιδεύει αντίστροφα, δηλ. από το υλικό με τον μικρότερο δείκτη διάθλασης προς το υλικό με τον μεγαλύτερο δείκτη διάθλασης<sup>8</sup>.

Η μέθοδος της πόλωσης από ανάκλαση δεν είναι πολύ αποδοτική, όταν χρησιμοποιείται ένα μόνο πλακίδιο, γιατί η ανακλώμενη είναι περίπου το 15% της προσπίπτουσας έντασης. Για να αυξήσουμε την ένταση χρησιμοποιούμε μια σειρά από πλακίδια τα οποία συνεισφέρουν στην ανάκλαση. Λεπτά φιλμ από διηλεκτρικό μπορούν επίσης να παίξουν το ρόλο των πλακιδίων και επειδή τόσο το πάχος όσο και ο δείκτης διάθλασης των φιλμ μπορεί να ελεγχθεί πειραματικά, μπορεί να κατασκευασθεί επίστρωση πολλών στρωμάτων, που μπορεί να δώσει ένα σχεδόν τέλειο πολωτή. Στο Σχήμα 10 παρατηρούμε μια τέτοια συσκευή πολλών επιστρώσεων.

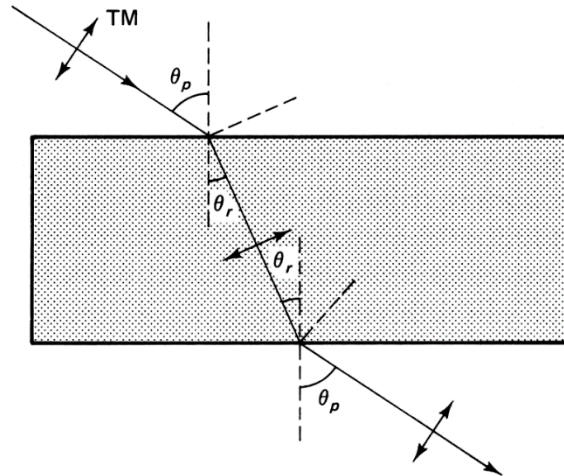
Μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή της πόλωσης από ανάκλαση είναι το λεγόμενο *παράθυρο Brewster* (Σχήμα 11), το οποίο λειτουργεί σαν ένα από τα πλακίδια του σχήματος 10. Όταν πολωμένο φως TM προπίπτει υπό την γωνία Brewster στο πλακίδιο θα περάσει ολόκληρη από την πρώτη επιφάνεια., και θα προσπέσει υπό γωνία  $\theta_r$  στην δεύτερη επιφάνεια, όπου επίσης ικανοποιείται η σχέση 2.4-2, επομένως και πάλι θα διέλθει ανέπαφη η δέσμη.



**Σχήμα 10.** Πολωτής αποτελούμενος από επιστρώσεις ανακλαστικών φιλμ

Τα παράθυρα Brewster βρίσκουν εφαρμογή στις οπτικές κοιλότητες των laser, όπου το ενεργό υλικό περιορίζεται σε πολλές περιπτώσεις από δύο τέτοια παράθυρα, στα άκρα. Το φως μέσα στην οπτική κοιλότητα διέρχεται κατ'επανάληψη από τα παράθυρα, καθώς διαδίδεται από και προς τα κάτοπτρα στα άκρα του laser (βλ. αντίστοιχο κεφάλαιο). Κάθε φορά η συνιστώσα TM διέρχεται πλήρως, ενώ η συνιστώσα TE ανακλάται μερικώς (δηλ. απορρίπτεται από την δέσμη). Μετά από πολλές τέτοιες διελεύσεις, η τελική δέσμη είναι σχεδόν τέλεια πολωμένη κατά TM.

<sup>8</sup> όπως απαιτείται από τη γεωμετρία και τον ορισμό της γωνίας Brewster.



**Σχήμα 11.** Παράθυρο Brewster. Ο νόμος Brewster ικανοποιείται και στις δύο επιφάνειες για το TM mode.

- **Πόλωση λόγω διπλοθλαστικότητας**

Διπλοθλαστικά ονομάζονται τα υλικά που έχουν δύο δείκτες διάθλασης, ανάλογα με την κατεύθυνση της δέσμης σχετικά με τον οπτικό άξονα του υλικού. Αυτό βασικά οφείλεται στην ανισοτροπία των δυνάμεων που συγκρατούν τα ηλεκτρόνια ενός κρυστάλλου.

Ας θεωρήσουμε την περίπτωση του ασβεστίτη ( $CaCO_3$ ) για να αντιληφθούμε το φαινόμενο. Το μόριο του ασβεστίτη έχει ένα τετραεδρικό πυραμιδοειδές σχήμα. Το Σχήμα 13 δείχνει ένα τέτοιο μόριο που περιβάλλεται από ίδια τετράεδρα ομοίως τοποθετημένα. Τα άτομα του οξυγόνου αποτελούν τις κορυφές του τριγώνου βάσης με τον άνθρακα στο κέντρο του ισοσκελούς τριγώνου. Το Ca βρίσκεται στην κορυφή της πυραμίδας. Στο Σχήμα 13 φαίνεται και η κατεύθυνση διάδοσης μιας μη πολωμένης δέσμης, που μπορεί να αναπαρασταθεί από τις δύο κάθετες μεταξύ τους

Συνιστώσες πόλωσης. Πρώτα ας θεωρήσουμε φως που εισέρχεται στον κρύσταλλο από το επίπεδο βάσης που καθορίζουν τα άτομα του οξυγόνου. Λόγω συμμετρίας οι συνιστώσες του πεδίου αλληλεπιδρούν με τα ηλεκτρόνια με ταλαντώσεις της ίδιας μορφής. Η κατεύθυνση αυτή της συμμετρίας ονομάζεται *οπτικός άξονας (OA)* του κρυστάλλου. Ας θεωρήσουμε τώρα μια δέσμη εισερχόμενη από τα αριστερά του κρυστάλλου. Εδώ οι δύο συνιστώσες προκαλούν ταλαντώσεις στα ηλεκτρόνια των ατόμων της βάσης είτε στο επίπεδο, είτε κάθετα σ' αυτό οι οποίες φυσικά δεν έχουν το ίδιο πλάτος. Η  $E_{\parallel}$  που είναι παράλληλη στον OA προκαλεί ταλαντώσεις κάθετες στο επίπεδο βάσης (τα αντίστροφα συμβαίνουν για την  $E_{\perp}$ ), όπου τα ηλεκτρόνια τείνουν να βρίσκονται λόγω του χημικού δεσμού στο επίπεδο της βάσης και άρα η ταλάντωση είναι ευκολότερη. Η διαφοροποίηση ως προς την ευκολία κίνησης των ηλεκτρονίων στο επίπεδο της βάσης και στο κάθετο σ' αυτό επίπεδο, μεταφράζεται σε διαφοροποίηση της επιτάχυνσης των ηλεκτρονίων στα αντίστοιχα δίπολα και εν συνεχεία σε διαφοροποίηση της έντασης του πεδίου που προκαλείται από τα δίπολα στις δύο κατευθύνσεις. Η κάθετη στον OA συνιστώσα του πεδίου αλληλεπιδρά περισσότερο δραστικά με τα ηλεκτρόνια του επιπέδου τριγώνου της βάσης. Η συνέπεια είναι να έχουμε μειωμένη ταχύτητα διέλευσης γι' αυτή τη δέσμη, δηλαδή  $v_{\perp} < v_{\parallel}$ . Αυτό σημαίνει  $n_{\perp} > n_{\parallel}$ , επειδή  $n = c/v$ . Οι μετρηθείσες τιμές δεικτών διάθλασης για τον ασβεστίτη είναι  $n_{\perp} = 1.658$  και  $n_{\parallel} = 1.486$  για  $\lambda = 589.3nm$ . Το μόριο του ασβεστίτη έχει μια τριπλή συμμετρία περιστροφής γύρω από τον οπτικό άξονα. Τέτοια υλικά έχουν ένα μόνο οπτικό άξονα και λέγονται μονοαξονικά διπλοθλαστικά υλικά (uniaxial birefringent). Επιπλέον, αν  $n_{\parallel} - n_{\perp} > 0$  αποκαλούνται θετικά και στην αντίθετη περίπτωση, αρνητικά. Ένας διπλοθλαστικός κρύσταλλος μπορεί να κοπεί με τον οπτικό του άξονα προς διάφορες κατευθύνσεις σε σχέση με το επίπεδο απ' όπου εισέρχεται η ακτίνα. Στο Σχήμα 14 φαίνεται μια τέτοια διάταξη με τον OA σε τρεις διαφορετικές κατευθύνσεις.

Έστω μη πολωμένο φως, το οποίο προσπίπτει κατά την οριζόντια διεύθυνση στα πλακίδια του σχήματος. Όπως και σε προηγούμενες περιπτώσεις, μπορούμε να αναπαραστήσουμε το φως αυτό με δύο ορθογώνιες συνιστώσες, την μία παράλληλη και την άλλη κάθετη προς τον οπτικό άξονα. Στην περίπτωση (α), και οι



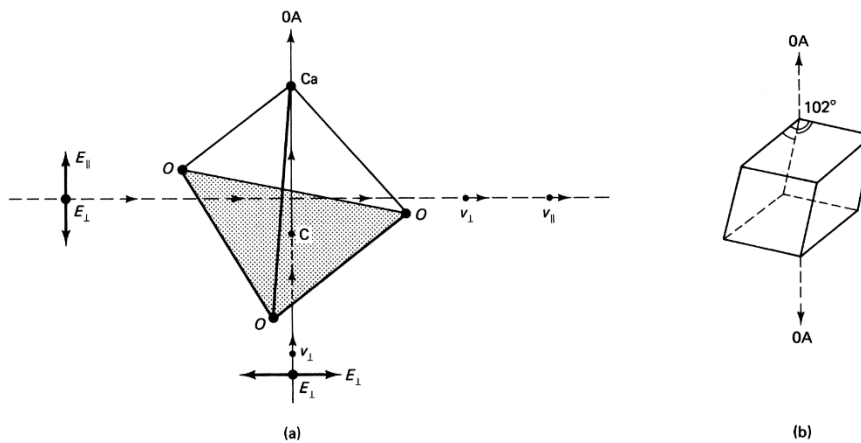
δύο αντιπροσωπευτικές συνιστώσες είναι κάθετες στον  $OA$  (η μία –που δεν φαίνεται στο σχήμα- είναι κάθετη στο επίπεδο της σελίδας), επομένως διαδίδονται στον κρύσταλλο με τον ίδιο δείκτη διάθλασης  $n_{\perp}$ . Αντίθετα, στις περιπτώσεις (b) και (c), μία από τις δύο συνιστώσες είναι παράλληλη προς τον  $OA$  και η άλλη είναι κάθετη, επομένως διαδίδονται με διαφορετική ταχύτητα (διαφορετικό δείκτη διάθλασης).

Συνεπώς, εισάγεται μία διαφορά στους αντίστοιχους οπτικούς δρόμους. Για κρύσταλλο πάχους  $d$  η διαφορά των οπτικών δρόμων είναι

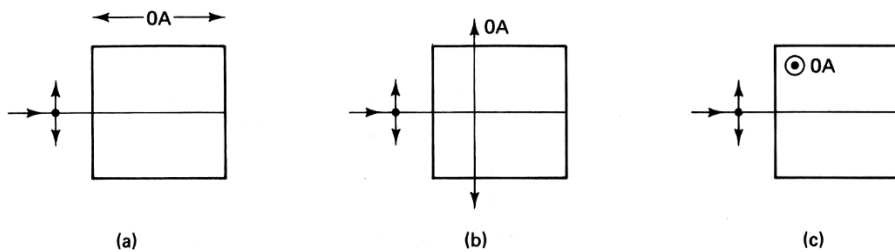
$$\Delta = |n_{\perp} - n_{\parallel}|d \quad (36)$$

και η αντίστοιχη διαφορά φάσης

$$\Delta\phi = \frac{2\pi|\Delta|}{\lambda_o} = \frac{2\pi}{\lambda_o}|n_{\perp} - n_{\parallel}|d \quad (37)$$



**Σχήμα 13.** (a) Διάδοση του φωτός μέσα από ένα κρύσταλλο ασβεστίτη. Τα τρία άτομα του οξυγόνου σχηματίζουν τη βάση του τετραέδρου του μορίου. Ο οπτικός άξονας είναι παράλληλος στην ευθεία που ενώνει τα άτομα C και Ca. (b) Το ρομβόεδρο του ασβεστίτη. Φαίνεται ο οπτικός άξονας ο οποίος διέρχεται από τις λιγότερο αιχμηρές κορυφές, όπου οι τρεις γωνίες των πλευρών είναι ίσες με  $102^\circ$  εκάστη.



**Σχήμα 14.** Το φως εισέρχεται σε ένα διπλοθλαστικό κρύσταλλο του οποίου ο οπτικός άξονας έχει διαφορετικές κατευθύνσεις σε σχέση με την διεύθυνση διάδοσης του φωτός: (a) Διάδοση ακτίνας παράλληλα στον  $OA$ . (b) Διάδοση κάθετα στον  $OA$  αλλά πάνω στο επίπεδο της σελίδας, και (c) Διάδοση κάθετα στον  $OA$  και κάθετα στο επίπεδο της σελίδας

Αν το πάχος του κρυστάλλου είναι τέτοιο ώστε η διαφορά φάσης να είναι  $\Delta\phi = \pi/2$ , τότε έχουμε ένα πλακίδιο  $\lambda/4$ . Αν  $\Delta\phi = \pi$ , τότε έχουμε ένα πλακίδιο  $\lambda/2$  μηδενικής τάξης. Επειδή τέτοια πλακίδια είναι

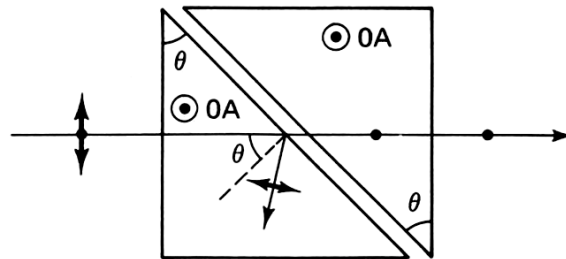


πάρα πολύ λεπτά γι' αυτό επιλέγονται πάχη τα οποία είναι ακέραια πολλαπλάσια του πάχους της μηδενικής τάξης. Δηλαδή, για ένα πλακίδιο  $\lambda/4$  επιλέγουμε  $\Delta\varphi = (2\pi)m + \pi/2$ , όπου  $m=1, 2, 3, \dots$

Επειδή το πάχος  $d$  ελέγχει τη διαφορά φάσης  $\Delta\varphi$ , γι' αυτό μια συνεχής δυνατότητα αλλαγής του πάχους είναι χρήσιμη. Ένα τέτοιο οπτικό σύστημα ονομάζεται σύστημα *αντιστάθμισης* (compensation) και ένας συχνά χρησιμοποιούμενος αντισταθμιστής είναι ο Soleil-Babinet που αποτελείται από δύο κρυστάλλους κομμένους με τριγωνική διατομή, με τον ένα να γλιστράει πάνω στον άλλο, με αποτέλεσμα το πάχος του συστήματος να μεταβάλλεται σταδιακά.

Στις προηγούμενες περιπτώσεις, οι δύο συνιστώσες πόλωσης της δέσμης εισόδου έχουν στη διάδοσή τους διαφορετικούς δείκτες διάθλασης αλλά παραμένουν σε μια δέσμη στην έξοδο. Είναι όμως δυνατό ο  $OA$  να σχηματίζει μία τυχαία γωνία με την διεύθυνση της προσπίπτουσας δέσμης. Τότε, εμφανίζονται δύο δέσμες στην έξοδο χωριστές μεταξύ τους, η κυρία (ordinary) και η δευτερεύουσα (extraordinary). Η δευτερεύουσα δεν ακολουθεί το νόμο του Snell και οι δύο δέσμες βγαίνουν από τον κρύσταλλο με κάθετες πολώσεις. Η κύρια δέσμη διαδίδεται μέσα στον κρύσταλλο με μια ταχύτητα που αντιστοιχεί σε ένα δείκτη διάθλασης  $n_o = n_{\perp} = c/v_{\perp}$  και η δευτερεύουσα με ταχύτητα που αντιστοιχεί σε ένα δείκτη διάθλασης  $n_e = n_{\parallel} = c/v_{\parallel}$ . Το αποτέλεσμα είναι η δευτερεύουσα να ξεχωρίζει μέσα στον κρύσταλλο από την κυρία δέσμη. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί αν αναλύσουμε την δευτερεύουσα σε δύο συνιστώσες, μία κάθετη και μία παράλληλη στον  $OA$ . Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση για τους φοιτητές.

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, από αυτά που αναφέραμε ότι αν οι δύο δέσμες με χωριστή πόλωση κάθετη μεταξύ τους, είναι δυνατόν να χωρισθούν και φυσικά, τότε η διπλή διάθλαση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να πάρουμε γραμμικά πολωμένο φως. Μία από τις ευρύτερα διαδεδομένες οπτικές διατάξεις για να το επιτύχουμε αυτό είναι και το πρίσμα Glan-Thomson που φαίνεται στο Σχήμα 15, που ακολουθεί.



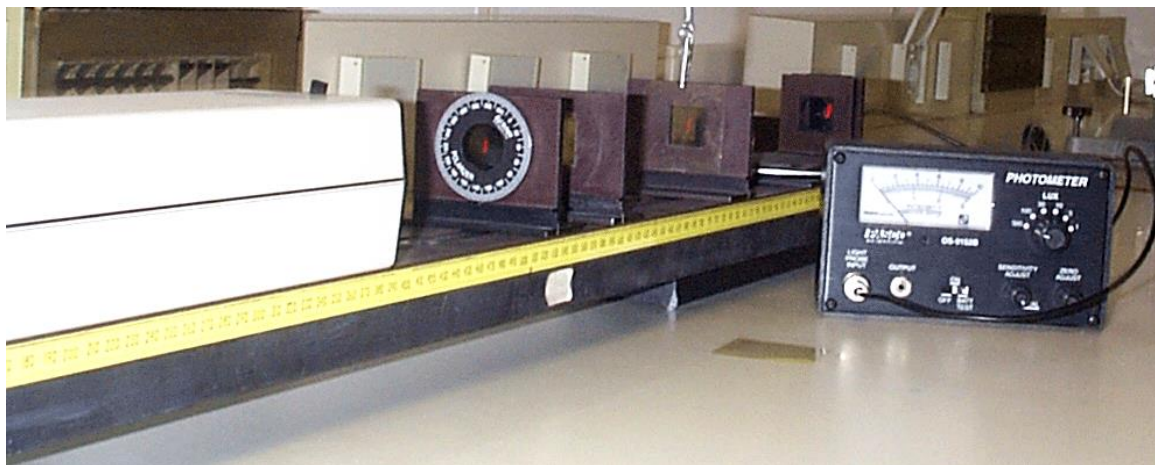
Σχήμα 15. Διάταξη του πρίσματος Glan-air

Στο Σχήμα απεικονίζονται δύο πρίσματα διπλοθλαστικών υλικών ασβεστίτη, με γωνίες πρίσματος  $\theta$  και παράλληλους οπτικούς άξονες. Μεταξύ των πρισμάτων υπάρχει μικρό κενό αέρα. Επιλέγοντας τη γωνία  $\theta$  μπορούμε να έχουμε ολική ανάκλαση της ακτίνας που έχει πόλωση παράλληλη στο επίπεδο που είναι κάθετο στον οπτικό άξονα. Το δεύτερο πρίσμα χρησιμοποιείται για να επαναφέρει την άλλη δέσμη στην κατεύθυνση της αρχικής (εκτός του υλικού) διεύθυνσης διάδοσης της δέσμης

### 3. Περιγραφή της πειραματικής διάταξης

Απαιτούμενος εξοπλισμός

- He-Ne laser
- οπτικός διάδρομος
- πολωτές Polaroid
- πλακίδια  $\lambda/2$  και  $\lambda/4$
- πέτασμα
- φωτοανιχνευτής



Σχήμα 16. Πειραματική διάταξη.

#### 4. Εκτέλεση του πειράματος

- Χρησιμοποιώντας τον ένα πολωτή βρείτε αν το φως του laser είναι πολωμένο. Σχολιάστε.
- Χρησιμοποιώντας και τους δύο πολωτές επαληθεύστε τη σχέση του Malus,  $I(\theta) = I_0 \cos^2 \theta$ , όπου  $\theta$  η γωνία μεταξύ των Οπτικών Αξόνων (ΟΑ) των δύο πολωτών. Να γίνει γραφική παράσταση της  $I(\theta)$  για  $0 < \theta < 180^\circ$  για την πειραματική και θεωρητική καμπύλη, και να συγκριθούν οι δυο καμπύλες. Διατυπώστε τα συμπεράσματά σας. **Προσοχή**, ελαττώστε την ένταση του laser, ώστε να μην κορεστεί ο ανιχνευτής (χρησιμοποιήστε την πρώτη ή δεύτερη πιο ευαίσθητη κλίμακα).
- Τοποθετήστε δύο γραμμικούς πολωτές σε διαστάρωση μεταξύ φωτεινής πηγής και φωτομέτρου. Τοποθετήστε ένα τρίτο γραμμικό πολωτή ανάμεσα στους δύο, και περιστρέψτε τον έως ότου παρατηρήσετε μέγιστη ένταση. Σε ποια γωνία συμβαίνει αυτό και γιατί;
- Μετρήστε τη γωνία Brewster για ένα πλακίδιο γυαλιού και υπολογίστε το δείκτη διάθλασης του γυαλιού για το μήκος κύματος του laser ( $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ ).
- Τοποθετήστε πρώτα πλακίδιο  $\lambda/4$  και μετά έναν πολωτή μεταξύ laser και φωτομέτρου (όπου ο ΟΑ του πολωτή-αναλυτή είναι παράλληλος με την κατεύθυνση της γραμμικής πόλωσης του laser). Μετρήστε την ένταση  $I(\varphi)$ , για  $0 < \varphi < 180^\circ$ , όπου  $\varphi$  είναι η γωνία μεταξύ του ΟΑ του πλακιδίου  $\lambda/4$  και την κατεύθυνση της γραμμικής πόλωσης του laser. Σχολιάστε για ποιές τιμές του  $\varphi$  θα δημιουργηθεί αριστερόστροφο και δεξιόστροφο κυκλικά πολωμένο φως. Για αυτές τις περιπτώσεις, περιστρέψτε τον πολωτή-αναλυτή, για να δείξετε ότι η ένταση δεν εξαρτάτε από την θέση του πολωτή. Εξηγήστε αναλυτικά τα αποτελέσματα (χρησιμοποιώντας ανύσματα και πίνακες Jones).
- Τοποθετήστε πλακίδιο  $\lambda/2$  και έναν πολωτή μεταξύ φωτεινής πηγής και φωτομέτρου (όπου ο ΟΑ του πολωτή-αναλυτή είναι παράλληλος με την κατεύθυνση της γραμμικής πόλωσης του laser). Μετρήστε την ένταση  $I(\varphi)$ , για  $0 < \varphi < 180^\circ$ , όπου  $\varphi$  είναι η γωνία μεταξύ του ΟΑ του πλακιδίου  $\lambda/2$  και την κατεύθυνση της γραμμικής πόλωσης του laser. Δείξτε ότι η πόλωση του φωτός περιστρέφεται με γωνία  $2\varphi$ . Εξηγήστε αναλυτικά τα αποτελέσματα (χρησιμοποιώντας ανύσματα και πίνακες Jones).

#### Βιβλιογραφία

- F.L. Pedrotti & L.S. Pedrotti, Introduction to Optics, Prentice Hall International Editions, 1993
- E. Hecht, Optics, Addison-Wesley Publishing Company, 1987

## 5. ΜΕΛΕΤΗ ΟΠΤΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΟΤΗΤΑΣ - ΠΟΛΩΣΙΜΕΤΡΟ

### 1. Σκοπός

- Μελέτη οπτικής ενεργότητας
- Χρήση πολωσιμέτρου
- Μέτρηση στροφοτικής ικανότητας δεξτρόζης

### 2. Στοιχεία θεωρίας

*Βασική προαπαιτούμενη γνώση*

Serway, Physics for Scientists & Engineers, Τόμος ΙΙΙ, Σύγχρονη Φυσική, Κεφ. 38.6 και αντίστοιχες ερωτήσεις και ασκήσεις

#### 2.1 Οπτική ενεργότητα

Ορισμένα υλικά έχουν την ικανότητα να στρέφουν το επίπεδο πόλωσης γραμμικά πολωμένου φωτός. Τέτοιο υλικό είναι, παραδείγματος χάριν, η ζάχαρη<sup>9</sup>. Τα οπτικώς ενεργά υλικά αποτελούνται συνήθως από μακρομόρια, τα οποία έχουν σπειροειδή διάταξη με αριστερόστροφη ή δεξιόστροφη απεικόνιση κοχλία. Ένα γραμμικά πολωμένο κύμα που διαδίδεται μέσα από ένα τέτοιο υλικό προκαλεί ταλαντώσεις των ηλεκτρονίων, τα οποία κινούνται όχι μόνο κατά μήκος του άξονα της σπείρας, αλλά και γύρω από αυτήν. Γενικά, μπορούμε να θεωρήσουμε ένα γραμμικά πολωμένο εγκάρσιο κύμα σαν άθροισμα δύο κυκλικά πολωμένων κυμάτων, του ενός με αριστερόστροφη πόλωση και του άλλου με δεξιόστροφη<sup>10</sup>. Σύμφωνα με τα παραπάνω, αναμένεται το αριστερόστροφα κυκλικά πολωμένο τμήμα της δέσμης να συμπεριφέρεται διαφορετικά στα σπειροειδή μόρια με δεξιόστροφη μορφή από ότι σε αυτά με αριστερόστροφη μορφή. Το ίδιο ισχύει και για την άλλη κυκλική συνιστώσα. Συνεπώς, η ταχύτητα διάδοσης των δύο κυκλικά πολωμένων κυμάτων θα είναι διαφορετική μέσα από το οπτικά ενεργό υλικό. Αν το υλικό έχει περισσότερα δεξιόστροφα σπειροειδή μόρια από αριστερόστροφα, τότε το συνολικό αποτέλεσμα θα είναι στροφή του επιπέδου της γραμμικής πόλωσης.

Έστω  $v_R$  η ταχύτητα διάδοσης για τα δεξιόστροφα κυκλικά κύματα, και  $v_L$  για τα αριστερόστροφα κυκλικά κύματα. Επειδή  $v=c/n$ , θα έχουμε διαφορετικούς δείκτες διάθλασης,  $n_R$  και  $n_L$ , για τα δεξιόστροφα και τα αριστερόστροφα κύματα.

Οι αντίστοιχοι κυματάρηθμοι για τα αριστερόστροφα και δεξιόστροφα κυκλικά πολωμένα κύματα θα είναι:

$$k_L = (\omega/c)n_L \quad (1)$$

και

$$k_R = (\omega/c)n_R \quad (2)$$

Οι αντίστοιχες καθυστερήσεις φάσης, μετά από διάδοση κατά ένα μήκος  $l$  μέσα στο υλικό (κατά μήκος του άξονα  $Z$ ), θα είναι

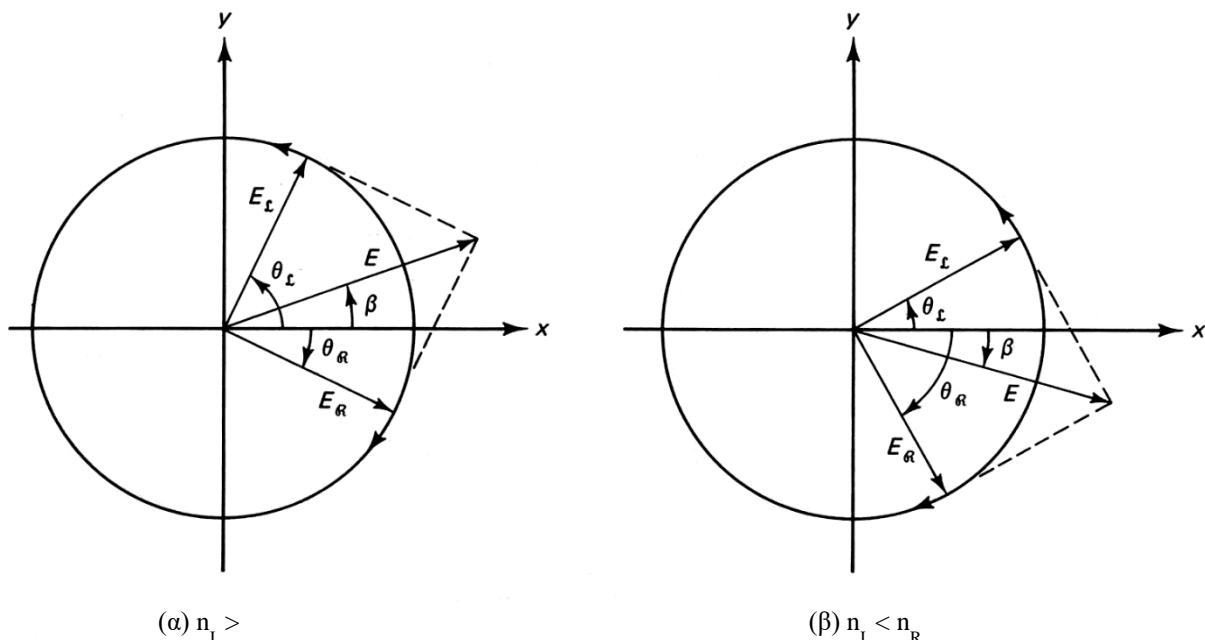
$$\theta_L = k_L l \quad (3)$$

$$\theta_R = k_R l \quad (4)$$

Από την σύνθεση των δύο πολώσεων, θα προκύψει και πάλι ένα γραμμικά πολωμένο κύμα, αλλά με το επίπεδο ταλάντωσης να έχει περιστραφεί κατά γωνία  $\beta$  σε σχέση με τον άξονα  $X$  όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.

<sup>9</sup> Ορισμένοι κρύσταλλοι, όπως ο χαλαζίας, είναι οπτικά ενεργοί, λόγω της ελικοειδούς διάταξης των μορίων τους στο κρυσταλλικό πλέγμα, ενώ τα μόρια αυτά καθ'εαυτά έχουν πλήρη περιστροφική συμμετρία.

<sup>10</sup> Η απόδειξη αφήνεται στον φοιτητή



**Σχήμα 1.** Οπτική περιστροφή που προέρχεται από την αριστερόστροφη και δεξιόστροφη πολωμένη συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου, που διαδίδονται με διαφορετικές ταχύτητες στο ενεργό υλικό. Στο α) ισχύει  $n_L > n_R$  (και το γραμμικά πολωμένο φως περιστρέφεται αριστερόστροφα), ενώ στο (β)  $n_L < n_R$  (και το γραμμικά πολωμένο φως περιστρέφεται δεξιόστροφα).

Όπως προκύπτει από το Σχήμα 1, το μέγεθος της περιστροφής  $\beta$ , μπορεί να καθορισθεί σημειώνοντας ότι το τελικό διάνυσμα του πεδίου  $\mathbf{E}$ , που καθορίζει την γωνία  $\beta$ , είναι πάντα η διαγώνιος ενός ισόπλευρου παραλληλόγραμμου. Έτσι έχουμε

$$\theta_L - \beta = \theta_R + \beta \quad (5)$$

και επομένως

$$\beta = \frac{1}{2} (\theta_L - \theta_R) \quad (6)$$

Χρησιμοποιώντας τους αντίστοιχους κυματάρθρωτους,  $k_L = k_0 n_L$  και  $k_R = k_0 n_R$ , όπου  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$  με  $\lambda_0$  το μήκος κύματος στο κενό, έχουμε

$$\beta = \frac{\pi l}{\lambda_0} (n_L - n_R) \quad (7)$$

Στην ουσία η οπτική ενεργότητα δεν είναι τίποτε άλλο από μια κυκλική διπλοθλαστικότητα, που χαρακτηρίζεται από τους δείκτες διάθλασης  $n_L$  και  $n_R$  (συγκρίνετε με την συνήθη διπλοθλαστικότητα που χαρακτηρίζεται από τους δείκτες  $n_{\perp}$  και  $n_{\parallel}$  για διάδοση γραμμικά πολωμένου φωτός με κατεύθυνση είτε κάθετη είτε παράλληλη με τον ΟΑ).

Το γεγονός ότι η γωνία  $\beta$  είναι ανάλογη του  $l$  (εξ. 7) δείχνει ότι το επίπεδο ταλάντωσης του κύματος αυτού στρέφεται βαθμιαία, καθώς το κύμα διεισδύει στο οπτικά ενεργό μέσο. Όταν  $n_L > n_R$ , τότε η  $\beta$  είναι θετική, δηλ. έχει την φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού ως προς τον παρατηρητή που βλέπει την φωτεινή πηγή. Σε αυτή την περίπτωση το υλικό είναι αριστερόστροφο (Σχήμα 1α) οπτικά ενεργό. Όταν  $n_L < n_R$ , τότε η  $\beta$  είναι αρνητική, και το υλικό λέγεται δεξιόστροφο (Σχήμα 1β) οπτικά ενεργό.

Στην περίπτωση διαλύματος οπτικά ενεργής ουσίας, είναι προφανές ότι η τελική στροφή,  $\varphi$ , του επιπέδου πόλωσης γραμμικά πολωμένου φωτός, θα είναι (α) ανάλογη της περιεκτικότητας,  $c$ , του διαλύματος σε

μόρια της οπτικά ενεργής ουσίας, και  $(\beta)$  ανάλογη του μήκους της διαδρομής,  $l$ , του πολωμένου φωτός μέσα από το ενεργό διάλυμα. Δηλαδή,

$$\varphi = \alpha l c \quad (8)$$

όπου  $\alpha$  λεγόμενη ειδική στροφική ικανότητα του υλικού. Η ειδική στροφική ικανότητα εξαρτάται από το είδος της διαλυμένης ουσίας (που καθορίζει την διαφορά  $n_L - n_R$ ), και από το μήκος κύματος του χρησιμοποιούμενου φωτός (βλ. εξίσωση 7).

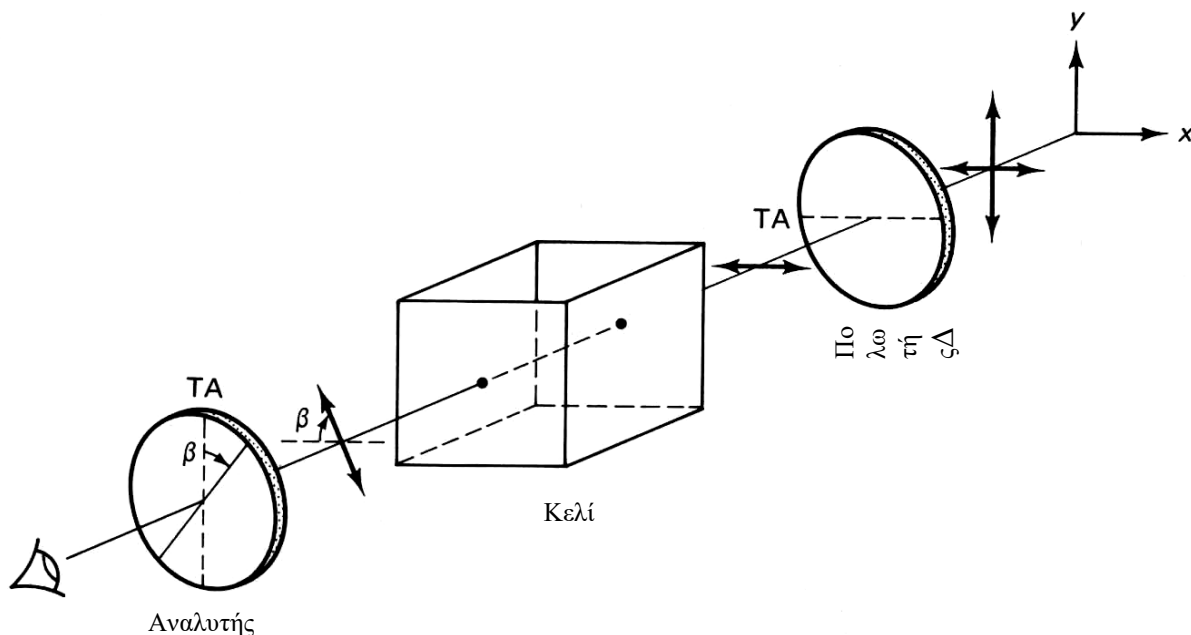
### 3. Περιγραφή της πειραματικής διάταξης

#### 3.1 Απαιτούμενος εξοπλισμός

- η συσκευή του πολωσιμέτρου, για την μέτρηση της στροφής του επιπέδου πόλωσης γραμμικά πολωμένου φωτός
- δοχεία, ζυγός ακριβείας, ζάχαρη, νερό για την δημιουργία διαλυμάτων ζάχαρης

#### 3.2 Λειτουργία πολωσιμέτρου

Η οπτική ενεργότητα μετράται εύκολα αν χρησιμοποιήσουμε τη διάταξη του Σχήματος 2, όπου με τον πρώτο πολωτή επιλέγουμε μια κατεύθυνση γραμμικής πόλωσης (TA) για το μη πολωμένο φως της πηγής. Ο αναλυτής τοποθετείται αρχικά σε θέση πλήρους απόσβεσης της διερχόμενης δέσμης με το κελί του ενεργού υλικού να περιέχει μόνο τον διαλύτη. Αυτό γίνεται για να αποκλείσουμε πιθανή στροφή που οφείλεται στο υάλινο δοχείο και τον διαλύτη, από τις μετρήσεις της στροφής του επιπέδου ταλάντωσης του πεδίου, που οφείλονται στη διαλυμένη ουσία. Στη συνέχεια αντικαθιστούμε τον διαλύτη με το διάλυμα και προσδιορίζουμε τη γωνία  $\varphi$ , που πρέπει να στραφεί ο αναλυτής για να επέλθει απόσβεση της διερχόμενης δέσμης.



Σχήμα 2. Διάταξη μέτρησης της οπτικής ενεργότητας.

Η απλή διάταξη του Σχήματος 2 αποτελεί την αρχή λειτουργίας του πολωσιμέτρου. Η συγκεκριμένη συσκευή που θα χρησιμοποιήσετε στο πείραμά σας φαίνεται στο Σχήμα 3.

Το πολωσίμετρο αυτό αποτελείται από έναν πολωτή, από δοχείο στο οποίο τοποθετείται το οπτικά ενεργό υλικό, από ένα αναλυτή που φέρει ένα γωνιομετρικό κύκλο, και από μία διόπτρα για την παρατήρηση. Επειδή απόσβεση του φωτός επέρχεται για αρκετά μεγάλη περιοχή γωνιών γύρω από την θέση

καθετότητας του επιπέδου ταλαντώσεως του φωτός με το χαρακτηριστικό επίπεδο του αναλυτή, η θέση απόσβεσης δεν είναι δυνατόν να προσδιορισθεί με μεγάλη ακρίβεια. Για να αυξηθεί η ακρίβεια της μέτρησης χρησιμοποιούνται πολωσίμετρα που έχουν εκτός από τον κύριο πολωτή και έναν (ή δύο) πρόσθετο πολωτή Nicol, που καλύπτει πλευρικά τον κύριο πολωτή, από την μία πλευρά της κεντρικής ακτίνας. Το βοηθητικό αυτό Nicol ρυθμίζεται έτσι ώστε το χαρακτηριστικό του επίπεδο να σχηματίζει γωνία μερικών μοιρών με το χαρακτηριστικό επίπεδο του κύριου πολωτή. Με αυτό τον τρόπο το οπτικό επίπεδο χωρίζεται σε δύο περιοχές που αντιστοιχούν σε φως με επίπεδα ταλάντωσης διαφορετικά κατά μερικές μοίρες. Είναι προφανές ότι δεν υπάρχει θέση του αναλυτή για την οποία και οι δυο περιοχές να αποσβένονται ταυτόχρονα: εάν για μια γωνία επιτυγχάνεται απόσβεση του ενός πεδίου, το άλλο πεδίο θα είναι φωτεινό. Στροφή κατά μερικές μοίρες θα φέρει το αντίστροφο αποτέλεσμα. Ενδιάμεσα από τις δύο αυτές θέσεις του αναλυτή, υπάρχει μια θέση στην οποία επιτυγχάνεται ισοφωτισμός, κατά τον οποίο τα όρια μεταξύ των δύο πεδίων εξαφανίζονται, οπότε όλο το οπτικό πεδίο εμφανίζεται ασθενώς και ομοιόμορφα φωτισμένο. Η θέση αυτή ισοφωτισμού μπορεί να προσδιορισθεί με μεγάλη ακρίβεια.



**Σχήμα 3.** Φωτογραφία του πολωσίμετρου που θα χρησιμοποιηθεί στο πείραμα

#### 4. Εκτέλεση του πειράματος

1. Βεβαιωθείτε με τη χρήση πολωτή ότι το φως της λυχνίας μετά το φίλτρο είναι γραμμικά πολωμένο.
2. Εξοικειωθείτε με τη συσκευή και τη λειτουργία της.
3. Φτιάξτε στα διαφορετικά δοχεία που σας δίνονται διαλύματα διαφορετικών συγκεντρώσεων ζάχαρης (οι κατά βάρος συγκεντρώσεις αναγράφονται πάνω στα δοχεία), χρησιμοποιώντας τον ζυγό ακριβείας.
4. Γεμίστε τον γυάλινο σωλήνα με ένα από τα διαλύματα. Φροντίστε να μην υπάρχουν φυσαλίδες μέσα στον σωλήνα. Τοποθετήστε τον στο πολωσίμετρο και βρείτε την θέση αμυδρού ισοφωτισμού, περιστρέφοντας τον αναλυτή. Σημειώστε την γωνία στροφής,  $\varphi$ , και την αντίστοιχη συγκέντρωση,  $c$ , του διαλύματος.
5. Επαναλάβετε την διαδικασία μέτρησης 2-3 φορές για να εκτιμήσετε το σφάλμα της μέτρησής σας.
6. Επαναλάβετε την ίδια διαδικασία για όλα τα διαλύματα.
7. Επαναλάβετε την ίδια διαδικασία έχοντας γεμίσει τον σωλήνα με καθαρό νερό. Η γωνία που θα μετρήσετε σε αυτή την περίπτωση αποτελεί διόρθωση για τις γωνίες στροφής που μετρήσατε προηγουμένως
8. Να γίνει η γραφική παράσταση  $\varphi = \varphi(c)$ . Από την κλίση της ευθείας βρείτε την ειδική στροφική ικανότητα της ζάχαρης σε  $\text{μοίρες} \cdot \text{cm}^2 / \text{gr}$ . Δίνεται ότι το μήκος του σωλήνα είναι ίσο με  $l = 10 \text{ cm}$ . Βρείτε το πειραματικό σφάλμα της μέτρησής σας. Συγκρίνετε την τιμή που βρήκατε με την τιμή της βιβλιογραφίας ( $6.645 \text{ μοίρες} \cdot \text{cm}^2 / \text{gr}$ ). Από την σύγκριση αυτή μπορείτε να βγάλετε κάποιο συμπέρασμα για την καθαρότητα της ζάχαρης που χρησιμοποιήσατε; Εξηγήστε.
9. Για το άγνωστο διάλυμα ζάχαρης που σας δίνεται, προσδιορίστε τη συγκέντρωσή του (σε  $\text{gr} \cdot \text{cm}^{-3}$ ) και το αντίστοιχο πειραματικό σφάλμα.

## **Βιβλιογραφία**

- *Αλεξόπουλου, Γενική Φυσική, Τόμος 5<sup>ος</sup>, Οπτική, παρ. 138, 139, 140, 141*



## 6. ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΡΙΘΛΑΣΗΣ FRAUNHOFER

### 1. Σκοπός

Στο πείραμα αυτό θα ασχοληθείτε διαδοχικά με την περίθλαση Fraunhofer από μια σχισμή, από ένα ορθογώνιο και ένα κυκλικό άνοιγμα, από δύο σχισμές και από πολλές σχισμές.

#### Βασική προαπαιτούμενη γνώση

Serway, Physics for Scientists & Engineers, Τόμος ΙΙΙ, Κεφ. 38.1, 38.2 & 38.3 (συμπεριλαμβανομένων των αντίστοιχων παραδειγμάτων και προβλημάτων).

### 2. Θεωρία

#### 2.1 Εισαγωγικά

*Περίθλαση* είναι κάθε απόκλιση από τις προβλέψεις της γεωμετρικής οπτικής για την ευθύγραμμη διάδοση του φωτός, που προκαλείται από παρεμβολή κάποιου εμποδίου.

Έχουμε ήδη χρησιμοποιήσει τον κυματικό χαρακτήρα του φωτός για να εξηγήσουμε φαινόμενα συμβολής από δύο ή περισσότερες δέσμες που προέρχονται από την ίδια πηγή και διαχωρίζονται με διαίρεση του πλάτους ή του επιπέδου του κύματος. Βασικά το ίδιο φαινόμενο, η κυματική υφή του φωτός, ενέχεται και στην περίθλαση. Κάθε προσπάθεια περιορισμού της διάδοσης του φωτός προκαλεί φαινόμενα στη σκιά του αντικειμένου που παρεμποδίζει το φως, τα οποία δεν μπορούν να εξηγηθούν με τη γεωμετρική οπτική.

Στη λεγόμενη *φυσική οπτική*, βασικής σημασίας για τη ερμηνεία των πειραματικών παρατηρήσεων είναι η *αρχή των Huygens-Fresnel*. Σύμφωνα με τον Huygens κάθε σημείο του μετώπου του κύματος μπορεί να θεωρηθεί ως μια δευτερεύουσα πηγή που εκπέμπει ένα σφαιρικό κύμα. Στην υπόθεση αυτή ο Fresnel πρόσθεσε ότι το πραγματικό πεδίο μακριά από τη δευτερεύουσα πηγή είναι η υπέρθεση όλων των κυμάτων που προέρχονται από τις δευτερεύουσες πηγές, παίρνοντας υπόψη τα πλάτη και τις φάσεις για κάθε κύμα.

Επομένως, για να βρούμε την κατανομή της έντασης (εικόνα περίθλασης) που περιμένουμε να δούμε σε μία οθόνη, λόγω περίθλασης π.χ. από διπλή σχισμή, θα πρέπει να αθροίσουμε τα κύματα που προέρχονται από κάθε σημείο της επιφάνειας της κάθε σχισμής και να προσθέσουμε τα πλάτη, λαμβάνοντας υπόψη τις αποστάσεις που έχουν διανύσει τα διάφορα κυματικά μέτωπα, καθότι διαφορές στους οπτικούς δρόμους προκαλούν διαφορές στις φάσεις των κυμάτων που προστίθενται. Στην περίθλαση έχουμε συμβολή φωτεινών δεσμών που προέρχονται από μια συνεχή κατανομή πηγών, ενώ στα φαινόμενα συμβολής έχουμε συμβολή δεσμών που προέρχονται από διακριτό αριθμό πηγών. Αυτό, φυσικά, δεν αποτελεί θεμελιώδη αλλά μάλλον ιστορική διάκριση μεταξύ συμβολής και περίθλασης.

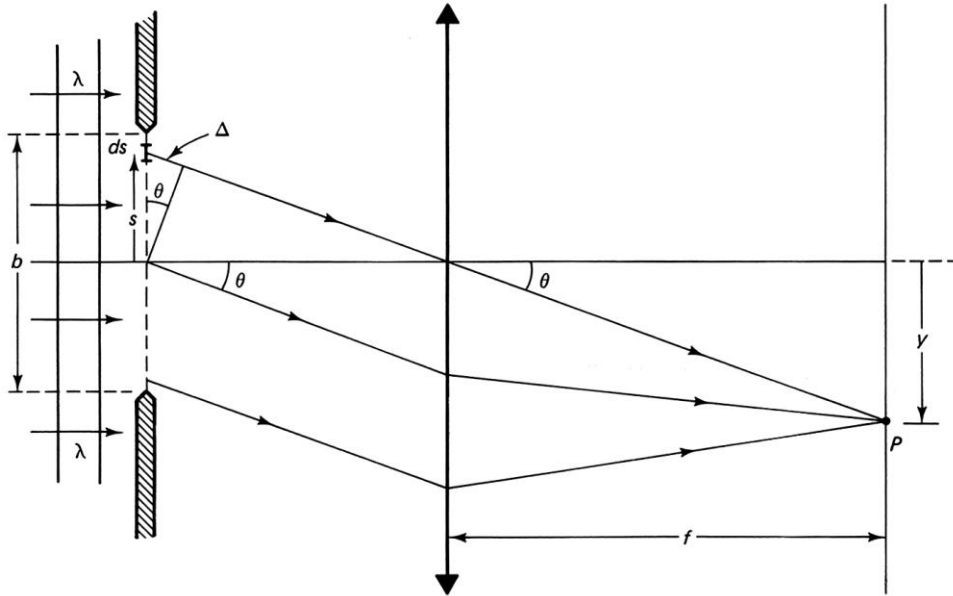
Μια επιπλέον διάκριση των φαινομένων που παρατηρούμε στην περίθλαση έχει να κάνει με τις μαθηματικές προσεγγίσεις που κάνουμε στον υπολογισμό του τελικού πεδίου. Αν η πηγή φωτός και το επίπεδο παρατήρησης (οθόνη) είναι και τα δύο σε μεγάλη απόσταση από το επίπεδο όπου το φως υφίσταται την περίθλαση, τότε το φως φθάνει στην οθόνη ως επίπεδο κύμα. Τότε μιλάμε για *περίθλαση Fraunhofer* ή *περίθλαση μακρινού πεδίου* (far-field diffraction). Στην αντίθετη περίπτωση έχουμε τη λεγόμενη *περίθλαση Fresnel* ή *περίθλαση κοντινού πεδίου* (near-field diffraction). Στην περίπτωση της περίθλασης Fraunhofer η εικόνα που παρατηρείται πάνω στο πέτασμα, αλλάζει ομοιόμορφα καθώς απομακρύνουμε την οθόνη από την σχισμή, πράγμα που δεν συμβαίνει στην περίπτωση της περίθλασης Fresnel.

Συνήθως, τα οπτικά στοιχεία (όπως φακοί, κάτοπτρα, πρίσματα, κλπ) που χρησιμοποιούνται για να αλλάξουν την πορεία και τις χωρικές διαστάσεις μιας φωτεινής δέσμης, έχουν τα ίδια ατέλειες και προκαλούν παραμορφώσεις στη διαδιδόμενη δέσμη που είναι πολλαπλάσιες εκείνων που προκαλούνται από περίθλαση. Επομένως, οπτικά των οποίων ο ρόλος περιορίζεται μόνο από την περίθλαση (diffraction limited optics) είναι στην πραγματικότητα πολύ καλά οπτικά.

#### 2.2 Περίθλαση από μία σχισμή



Μια σχισμή είναι ένα ορθογώνιο άνοιγμα, του οποίου το μήκος είναι πολύ μεγαλύτερο από το πλάτος του. Για περίθλαση Fraunhofer πρέπει η πηγή του φωτός να βρίσκεται μακριά από τη σχισμή, ώστε το κύμα που φθάνει στη σχισμή να είναι βασικά επίπεδο κύμα. Αυτό επιτυγχάνεται θέτοντας την πηγή στην εστία ενός συγκλίνοντος φακού, οπότε η εξερχόμενη δέσμη είναι παράλληλη, με την προϋπόθεση ότι η πηγή είναι σχετικά μικρή σε μέγεθος ώστε να θεωρείται σημειακή. Παρόμοια, η παρατήρηση σε μεγάλη απόσταση από τη σχισμή επιτυγχάνεται με ένα φακό εστιακής απόστασης  $f$  που συλλέγει όλες τις παράλληλες δέσμες σε συγκεκριμένο σημείο σε πέτασμα που τοποθετείται στην εστία του φακού. Για την περίπτωση που χρησιμοποιείται ως πηγή ένα laser He-Ne που έχει μια πολύ ελαφρά αποκλίνουσα παράλληλη δέσμη δεν χρειάζεται ο πρώτος φακός, ενώ και ο δεύτερος δεν είναι απαραίτητος για παρατηρήσεις σε πέτασμα, σε απόσταση μεγαλύτερη των 50cm από τη σχισμή (έλεγξε το αυτό).



**Σχήμα 1.** Γραφική αναπαράσταση του πειράματος για τη μελέτη της περίθλασης Fraunhofer από λεπτή σχισμή.

Στο Σχήμα 1 παρουσιάζεται διαγραμματικά η περίπτωση περίθλασης Fraunhofer από μια σχισμή. Ένα επίπεδο κύμα προσπίπτει στη σχισμή που έχει πλάτος  $b$  και μήκος πολύ μεγαλύτερο του πλάτους της. Σύμφωνα με την αρχή Huygens-Fresnel θεωρούμε ότι κάθε σημείο της επιφάνειας της σχισμής είναι εστία σφαιρικών κυμάτων, τα οποία φθάνουν με την αντίστοιχη καθυστέρηση στο σημείο  $P$  όπου προστίθενται. Θεωρούμε ότι οι στοιχειώδεις πηγές της σχισμής έχουν κάποια απειροστή διάσταση  $ds$  και συνεισφέρουν στο  $P$  της μορφής:

$$dE_p = \left( \frac{dE_o}{r} \right) e^{i(kr - \omega t)} \quad (1)$$

όπου  $r$  είναι η οπτική απόσταση μεταξύ  $ds$  και  $P$ . Το πλάτος του κύματος διαιρείται με το  $r$  γιατί το πλάτος του σφαιρικού κύματος ελαττώνεται με την απόσταση κατά  $1/r$ . Ας θέσουμε  $r=r_o$  για τη στοιχειώδη πηγή που βρίσκεται στο  $s=0$ . Τότε, το στοιχειώδες πεδίο στο σημείο  $P$  που προέρχεται από μία οποιαδήποτε στοιχειώδη πηγή  $ds$  σε απόσταση  $s$  από την αρχή του άξονα (δηλ. από το μέσο της σχισμής) δίνεται από τον τύπο:

$$dE_p = \left( \frac{dE_o}{r} \right) e^{i(k(r_o + \Delta) - \omega t)} \quad (2)$$

όπου λάβαμε υπόψη τη διαφορά φάσης που προκύπτει από τη διαφορά οπτικού δρόμου που διανύει το κύμα αυτό, σε σχέση με εκείνο που προέρχεται από το  $s=0$ .

Επειδή το  $\Delta \ll r_o$ , δεν περιλαμβάνουμε την αλλαγή του μήκους  $r$  στο πλάτος, δηλ.  $dE_o/(r_o + \Delta) \approx dE_o/r_o \approx dE_o/r$ . Όμως, η διαφορά φάσης είναι πολύ ευαίσθητη σε μικρές μεταβολές της διαδρομής. Το πλάτος της ακτινοβολίας που εκπέμπεται από κάθε στοιχειώδη πηγή εξαρτάται από το μέγεθος του  $ds$ , έτσι ώστε όταν όλες οι συνεισφορές προστεθούν, να έχουμε την ολική συνεισφορά στο σημείο  $P$ . Επομένως μπορούμε να γράψουμε

$$dE_o = E_L ds \quad (3)$$

όπου  $E_L$  είναι το πλάτος του ηλεκτρικού πεδίου ανά μονάδα πλάτους της σχισμής ( $E_L b = E_o$ ). Για το σημείο  $P$ , σε γωνία  $\theta$  κάτω από τον άξονα που περνά από το κέντρο του φακού, έχουμε από το Σχήμα 1 ότι,  $\Delta = s \sin \theta$ . Έτσι, η διαφορική συνεισφορά στο πεδίο του  $P$  από μια οποιαδήποτε στοιχειώδη πηγή  $ds$  γίνεται:

$$dE_p = \left( \frac{E_L ds}{r_o} \right) e^{i(kr_o + ks \sin(\theta) - \omega t)} \quad (3a)$$

Ολοκληρώνοντας σ' όλο το πλάτος της σχισμής έχουμε

$$E_p = \left( \frac{E_L}{r_o} \int_{-b/2}^{b/2} e^{iks \sin(\theta)} ds \right) e^{i(kr_o - \omega t)} \quad (4)$$

Επειδή μας ενδιαφέρει η ένταση την οποία μπορούμε να μετρήσουμε και όχι το πλάτος του πεδίου, λόγω της πολύ υψηλής συχνότητας των οπτικών κυμάτων  $\omega \sim 10^{14}$  Hz, και  $I = E_p E_p^* = |E_p|^2$ , γι' αυτό κρατάμε μόνο τους όρους της παρένθεσης στην (4) και έχουμε

$$E_R = \frac{E_L}{r_o} \left( \frac{e^{iks \sin(\theta)}}{ik \sin(\theta)} \right)_{-b/2}^{b/2} \quad (5)$$

Αν θέσουμε τα όρια της ολοκλήρωσης στην (5) έχουμε

$$E_R = \frac{E_L}{r_o} \frac{1}{ik \sin(\theta)} \left( e^{(ikb \sin(\theta))/2} - e^{-(ikb \sin(\theta))/2} \right) \quad (6)$$

Κάνοντας την αντικατάσταση

$$\beta \equiv \frac{1}{2} kb \sin(\theta) \quad (7)$$

λαμβάνουμε την εξίσωση

$$E_R = \frac{E_L}{r_o} \frac{1}{2i\beta} \left( e^{i\beta} - e^{-i\beta} \right) = \frac{E_L}{r_o} \frac{b}{2i\beta} (2i \sin(\beta)) \quad (8)$$

όπου εφαρμόζουμε την εξίσωση του Euler για τους εκθετικούς όρους. Τελικά, απλοποιώντας, καταλήγουμε στη σχέση:

$$E_R = \frac{E_L b \sin(\beta)}{r_o \beta} \quad (9)$$

Το πλάτος πεδίου στο  $P$ , που δίνεται από εξίσωση (9), περιέχει τη συνάρτηση  $\sin(\beta)/\beta$ , όπου το  $\beta$  αλλάζει με την γωνία  $\theta$  και επομένως με τη θέση του  $P$  πάνω στο πέτασμα. Μπορούμε να δώσουμε μια φυσική σημασία στο  $\beta$  αν το ορίσουμε ως διαφορά φάσης που ορίζεται γενικά ως  $k\Delta$ . Η εξίσωση (7) δίνει στο  $\Delta$  την τιμή  $\Delta = (b/2) \sin(\theta)$  που αντιστοιχεί στη διαφορά φάσης μεταξύ των κυμάτων που προέρχονται από το κέντρο και από τα άκρα της σχισμής, όπου  $s = (b/2)$ .

Η ένταση του κύματος είναι ανάλογη με το τετράγωνο του πλάτους του, συνεπώς

$$I = \left( \frac{\epsilon_0 c}{2} \right) E_R^2 = \frac{\epsilon_0 c}{2} \left( \frac{E_L b}{r_o} \right)^2 \left( \frac{\sin(\beta)}{\beta} \right)^2 \quad (9\alpha)$$

όπου  $\epsilon_0$  η ηλεκτρική διαπερατότητα του κενού. Η σχέση (9α) γράφεται και ως

$$I = I_o \left( \frac{\sin(\beta)}{\beta} \right)^2 \equiv I_o \text{sinc}^2(\beta) \quad (10)$$

όπου το  $I_o$  περιέχει όλες τις σταθερές. Η συνάρτηση *sinc* πλησιάζει το  $I$  όταν το  $\beta$  πλησιάζει το μηδέν, δηλ.  $I=I_o$  για  $\theta = 0$ . Αντίθετα, η ένταση μηδενίζεται όταν  $\sin(\beta)=0$ , δηλ. όταν

$$\beta = \frac{1}{2} kb \sin(\theta) = m\pi, \quad \text{με } m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (11\alpha)$$

Το Σχήμα 2 δείχνει την μεταβολή της έντασης και του πλάτους συναρτήσει του  $\beta$ . Θέτοντας  $k=2\pi/\lambda$ , η συνθήκη (11α) για ρίζες της συνάρτησης *sinc* γίνεται:

$$m\lambda = b \sin(\theta) \quad (12)$$

Πάνω στο πέτασμα η ένταση είναι μέγιστη στο  $\theta=0$ , που αντιστοιχεί στο  $y=0$  και γίνεται μηδέν για κάθε  $y$  που δίνεται από την σχέση:

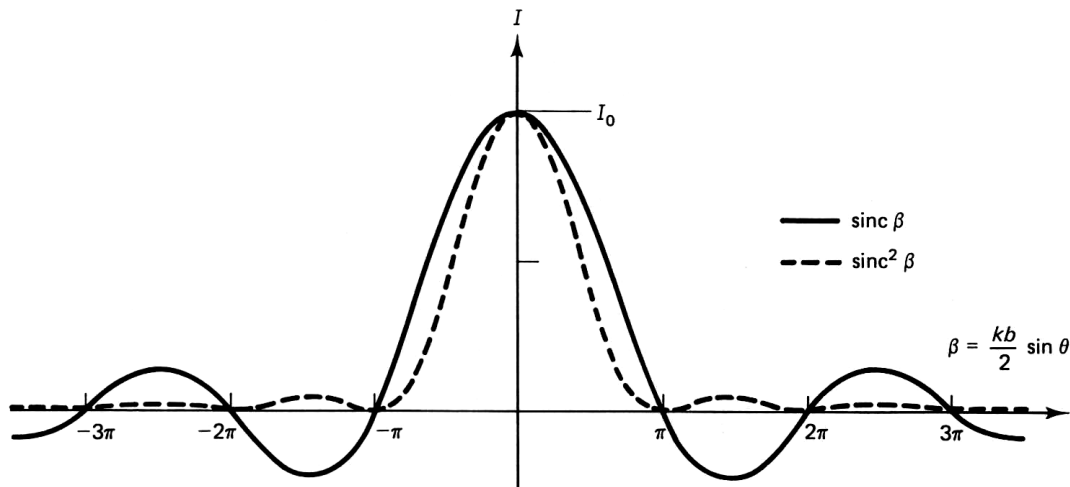
$$y \cong \frac{m\lambda f}{b} \quad (13)$$

Η εξίσωση (13) ισχύει για μικρές γωνίες όπου  $\sin(\theta) \sim \theta \sim y/f$ .

Η ένταση είναι συμμετρική γύρω από το  $y=0$ . Τα δευτερογενή μέγιστα δεν είναι ακριβώς στο μέσον μεταξύ διαδοχικών σημείων μηδενισμού, αλλά περίπου το πλησιάζουν, καθώς το  $\beta$  αυξάνεται. Τα μέγιστα της συνάρτησης δίνονται από τη σχέση:

$$\frac{d}{d\beta} \left( \frac{\sin(\beta)}{\beta} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\beta \cos(\beta) - \sin(\beta)}{\beta^2} = 0 \Rightarrow \tan(\beta) = 0 \quad (13\alpha)$$

και παρουσιάζονται στο Σχήμα 3. Η εξίσωση ικανοποιείται για  $\beta=1.43\pi, 2.46\pi, 3.47\pi$  κλπ.



**Σχήμα 2.** Η εξάρτηση της συνάρτησης *sinc* (πλήρης γραμμή) από το  $\beta$ . Η κατανομή της έντασης  $I$  (διακεκομμένη γραμμή) για μια σχισμή για την περίθλαση Fraunhofer είναι ανάλογη με το τετράγωνο της *sinc*( $\beta$ ). Η συνάρτηση αυτή είναι κανονικοποιημένη ως προς την ένταση στο  $y=0$ .

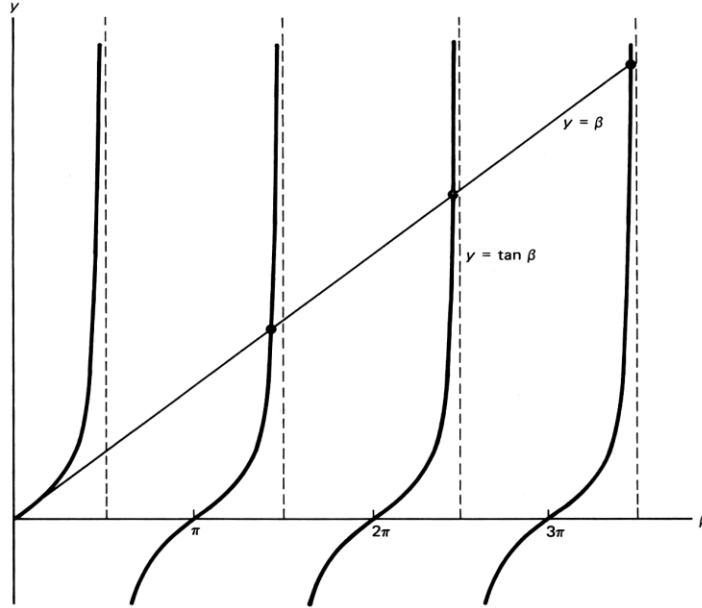
#### Παράδειγμα:

Ποιος είναι ο λόγος των εντάσεων του κυρίως λοβού και του πρώτου από τα δευτερεύοντα μέγιστα;

Ο λόγος υπολογίζεται από τη σχέση της έντασης για  $\beta=0$  και  $\beta=1.43\pi$

$$\frac{I_{\beta=0}}{I_{\beta=1.43\pi}} = \frac{(\sin^2(\beta))_{\beta=0}}{(\sin^2(\beta))_{\beta=1.43\pi}} = \frac{1}{(\sin^2(\beta))_{\beta=1.43\pi}} = \left( \frac{\beta^2}{\sin^2(\beta)} \right)_{\beta=1.43\pi} = \frac{20.18}{0.952} = 21.2 \quad (13\beta)$$

Άρα ο λόγος του μεγίστου της έντασης του πρώτου δευτερεύοντος λοβού προς τον κύριο είναι μόλις 4.7%.



**Σχήμα 3.** Παριστάνει τις τομές των συναρτήσεων  $y=\beta$  και  $y=\tan(\beta)$ . Οι τομές συμβαίνουν στα  $1.43\pi$  (αντί για  $1.5\pi$ ),  $2.46\pi$  (αντί  $2.5\pi$ ),  $3.47\pi$  (αντί  $3.5\pi$ ), κλπ.. Παρατηρήστε ότι όσο το  $\beta$  αυξάνει τόσο οι τιμές πλησιάζουν τις ευθείες που είναι ακριβώς στο μέσον των διαστημάτων. Το μεγαλύτερο μέρος της έντασης βρίσκεται στον κεντρικό λοβό.

Ο κεντρικός λοβός περιθλασης (δηλ. το συνολικό πλάτος μεταξύ των δύο πρώτων μηδενισμών της έντασης εκατέρωθεν του κεντρικού μεγίστου) φαίνεται υπό γωνία  $\Delta\theta$  από τη σχισμή (Σχήμα 4). Χρησιμοποιώντας τη σχέση (12) για  $m= \pm 1$  και θέτοντας  $\sin(\theta)=\theta$ , έχουμε

$$\Delta\theta = \frac{2\lambda}{b} \quad (14)$$

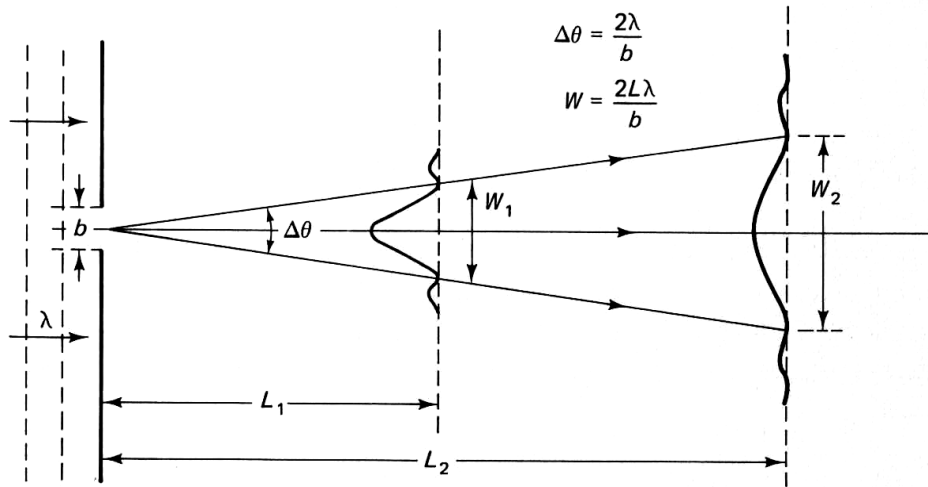
Δηλαδή, ο κεντρικός λοβός απλώνει απεριόριστα όσο το εύρος της σχισμής ελαττώνεται. Θα πλησιάσει όμως το άπειρο; Πρόσφατα πειράματα έδειξαν ότι για σχισμές της τάξης των  $nm$  η περιθλαση αρχίζει να περιορίζεται. Αυτό οφείλεται στην αλληλεπίδραση του φωτός με τα φωνόνια των μετάλλων που στη σχισμή έχουν κατεύθυνση ορμής μη παράλληλη προς την επιφάνεια. Είναι επίσης φανερό από την εξίσωση (14) ότι οι διαστάσεις του πρώτου λοβού εξαρτώνται και από το μήκος κύματος  $\lambda$ . Επομένως μπορούμε μετρώντας την  $\Delta\theta$  να προσδιορίσουμε τα μεγέθη  $\lambda$  και  $b$  αν ένα από αυτά είναι γνωστό με άλλο τρόπο.

### 2.3 Άνοιγμα της δέσμης

Σύμφωνα με την εξίσωση (14), το γωνιακό άνοιγμα του κεντρικού λοβού από περιθλαση Fraunhofer, είναι ανεξάρτητο της απόστασης σχισμής – πετάσματος,  $L$ . Η γραμμική διάσταση του λοβού  $W$ , προφανώς θα αυξάνεται αυξανόμενης της απόστασης  $L$ , όπως φαίνεται και από το Σχήμα 4, σύμφωνα με τη σχέση :

$$W = L\Delta\theta = \frac{2L\lambda}{b} \quad (15)$$

Επομένως, η περίθλαση από σχισμή επιβάλλει άνοιγμα της διερχόμενης δέσμης, με τον πρώτο λοβό να επεκτείνεται σύμφωνα με την (15). Αν δεν έχουμε σχισμή, αλλά απλώς δέσμη με κάποια εγκάρσια διατομή, τότε θα υποστεί περίθλαση που οφείλεται στην πεπερασμένη εγκάρσια διατομή της. Δηλαδή, όλες οι παράλληλες δέσμες ανοίγουν.



Σχήμα 4. Αναπαράσταση του κεντρικού λοβού της περίθλασης από μια λεπτή σχισμή.

#### Παράδειγμα

Έστω μια παράλληλη δέσμη laser με  $\lambda=546 \text{ nm}$  και εύρος  $b=0.5 \text{ mm}$  που διαδίδεται σε απόσταση  $10\text{m}$ . Βρείτε το τελικό άνοιγμα της δέσμης.

**Λύση:** Από την εξίσωση (15) έχουμε ότι

$$W = \frac{2L\lambda}{b} = \frac{2(10)(546 \times 10^{-9})}{0.5 \times 10^{-3}} = 21.8 \text{ mm}.$$

Δηλαδή, ακόμη και η δέσμη ενός laser που είναι αρκετά παράλληλη υφίσταται περίθλαση. Δεν μπορούν να υπάρξουν τελείως παράλληλες δέσμες φωτός. Αυτό αποτελεί μία βασική συνέπεια της κυματικής φύσης του φωτός.

Η ενεργειακή κατανομή της έντασης μιας βασικής ακτίνας laser σε εγκάρσια διατομή είναι Γκαουσιανή. Υποθέτουμε εδώ ότι το άνοιγμα της σχισμής είναι πολύ μικρό σε σχέση με τη διάμετρο της δέσμης που ορίζεται από την ακτίνα που αντιστοιχεί στο ήμισυ της μέγιστης έντασης, ώστε η ένταση στην επιφάνεια της σχισμής να είναι ομοιόμορφη. Επιπλέον έχουμε υποθέσει ότι έχουμε επίπεδο κύμα το οποίο προσπίπτει στη σχισμή. Στην περίπτωση μη επιπέδου κύματος αναμένονται τροποποιήσεις της σχέσης που περιγράφει την περίθλαση.

Η σχέση (15) βρέθηκε για την προσέγγιση Fraunhofer, μακρινού πεδίου. Η γενικότερη θεωρία της περίθλασης προβλέπει ότι υπάρχει μια περιοχή κοντά στη σχισμή, όπου η διάμετρος της δέσμης είναι μικρότερη από το άνοιγμα της σχισμής  $b$ . Επομένως, για να έχουμε περίθλαση Fraunhofer πρέπει το πέτασμα να είναι σε απόσταση  $L \gg$  από ένα  $L_{\min}$ , όπου ισχύει  $w=b$ . Δηλαδή,

$$L_{\min} = \frac{b^2}{2\lambda} \quad \text{και} \quad L \gg \frac{b^2}{\lambda} \quad (15a)$$

Μια γενικότερη αντιμετώπιση της περίθλασης οδηγεί στο ακόλουθο κριτήριο για να έχουμε περίθλαση Fraunhofer:

$$L \gg (\text{εμβαδόν της σχισμής})/\lambda \quad (16)$$

(Βλ. κεφάλαιο για την περίθλαση Fresnel)

### 2.4 Περίθλαση από ορθογώνιες και κυκλικές οπές

Μέχρι τώρα περιγράψαμε την περίθλαση από μια σχισμή με πλάτος  $b$  πολύ μικρότερο του μήκους της, Σχήμα 5(a). Όταν και οι δύο διαστάσεις της σχισμής είναι παραπλήσιες, τότε θα έχουμε αισθητή περίθλαση και στις δύο διευθύνσεις (Σχήμα 5). Για το ύψος  $a$ , γράφουμε λοιπόν σχέση ανάλογη της εξίσωσης (10):

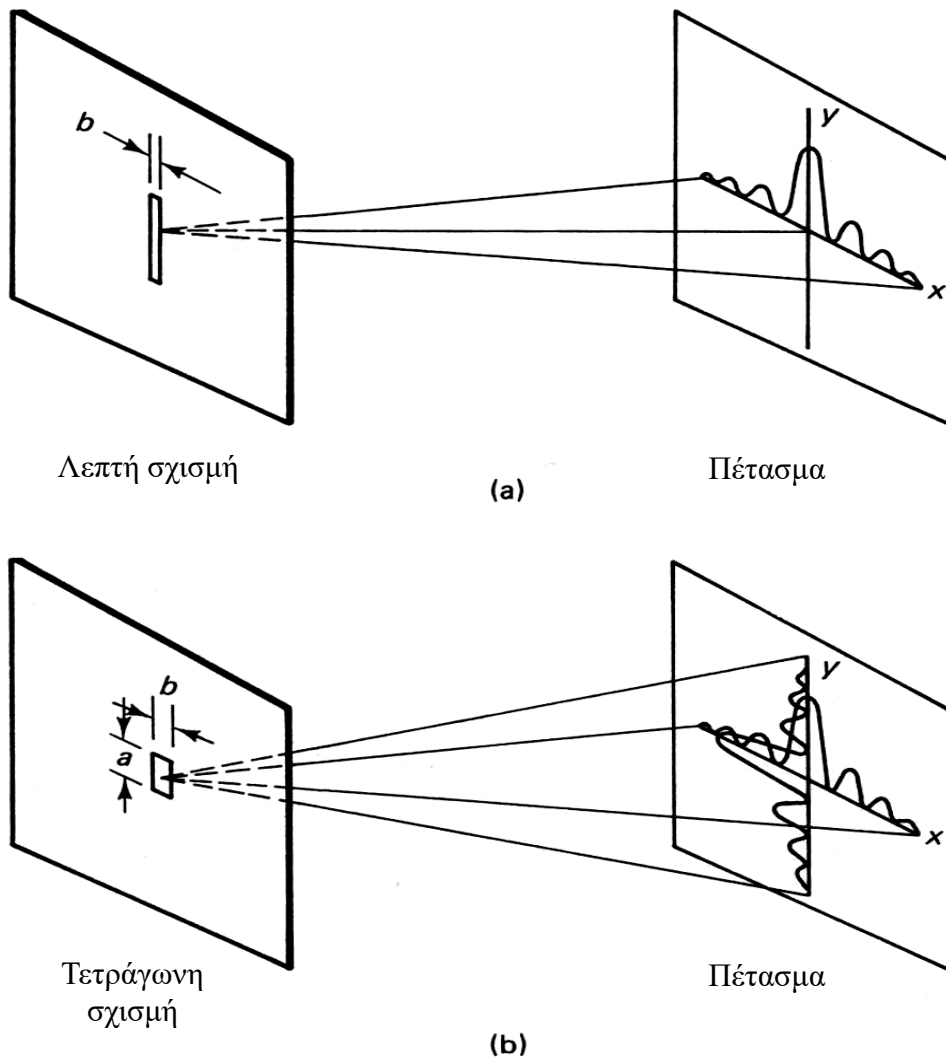
$$I = I_o \left( \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \right)^2 \quad \text{όπου} \quad \alpha = \left( \frac{k}{2} \right) a \sin(\theta) \quad (17)$$

Η ένταση του πεδίου θα εμφανίζει μηδενικές τιμές στα  $x$  και  $y$  που ικανοποιούν τις σχέσεις:

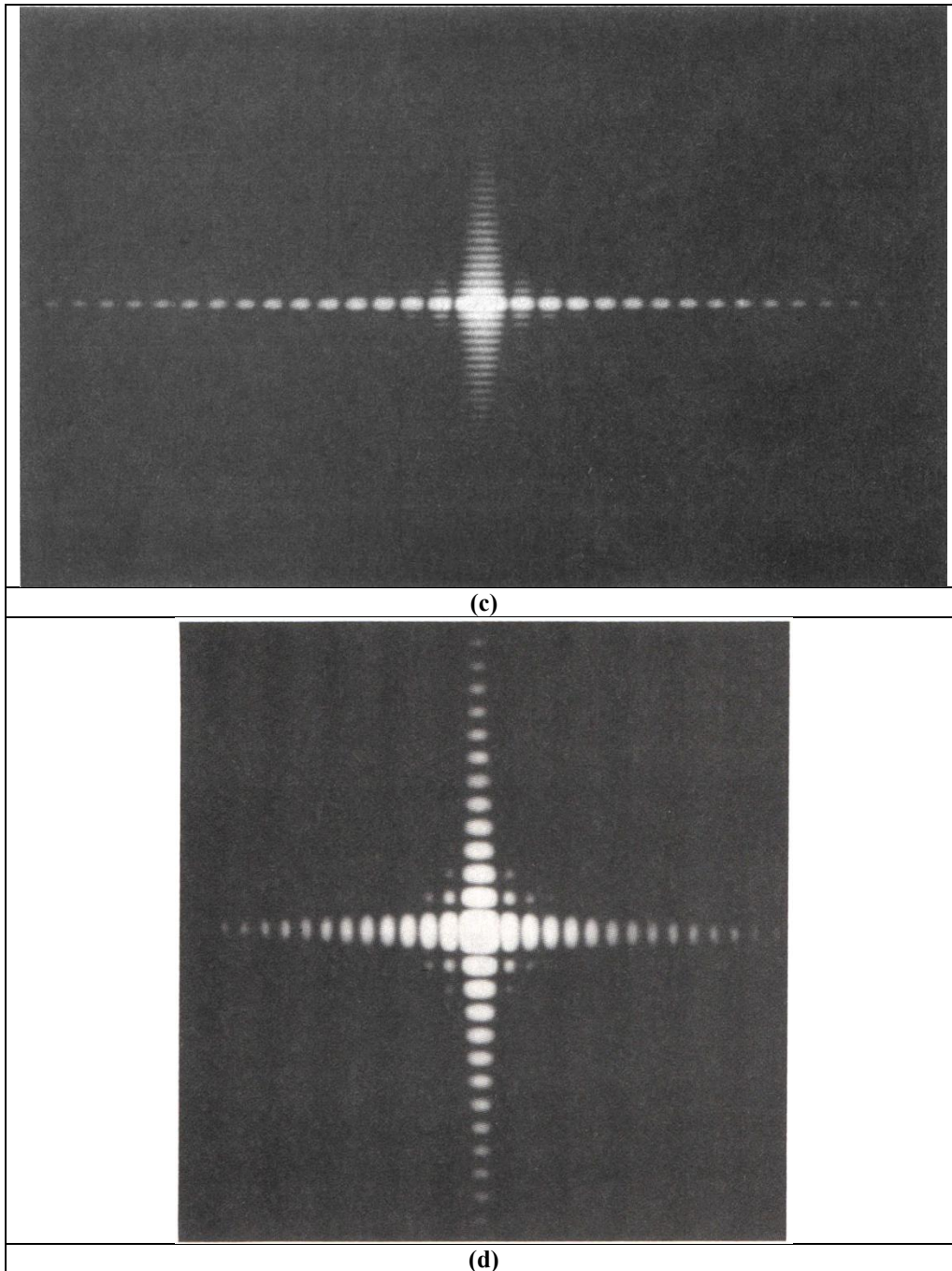
$$y = \frac{m\lambda f}{b} \quad \text{και} \quad x = \frac{n\lambda f}{a} \quad (17a)$$

όπου τα  $m$  και  $n$  είναι ακέραιοι αριθμοί διάφοροι του μηδενός. Η ένταση πάνω στο πέτασμα είναι το γινόμενο των επιμέρους εντάσεων στους άξονες  $x$  και  $y$  είναι:

$$I = I_o (\sin^2 \beta)(\sin^2 \alpha) \quad (18)$$



**Σχήμα 5.** (a) Περίθλαση Fraunhofer από λεπτή σχισμή πλάτους  $b$ . Μόνο αυτή η διάσταση εμφανίζει σημαντική περίθλαση. (b) Περίθλαση από τετράγωνη σχισμή όπου τα  $a$  και  $b$  έχουν τις ίδιες περίπου τιμές.



**Σχήμα 5:** (συνέχεια) (c) Πραγματική εικόνα περίθλασης της περίπτωσης (a). (d) Πραγματική εικόνα περίθλασης από τετράγωνη σχισμή που αντιστοιχεί στην περίπτωση (b).

Τα Σχήματα 5(c) και 5(d) εμφανίζουν τα αποτελέσματα από περίθλαση από ορθογώνιο άνοιγμα.

Όταν το άνοιγμα είναι κυκλικό η ολοκλήρωση που αφορά την περίθλαση γίνεται πάνω σ' ολόκληρη την επιφάνεια του ανοίγματος. Επομένως, στη θέση της εξίσωσης (3) ορίζουμε το  $dE_o = E_A dA$ , όπου  $E_A$  είναι τώρα το πλάτος ανά μονάδα επιφάνειας. Το πεδίο στο  $\mathbf{P}$  δίνεται από την σχέση:



$$E_P = \frac{E_A}{r_o} \iint_{Area} e^{isk \sin \theta} dA \quad (18a)$$

Παίρνοντας ως στοιχειώδη επιφάνεια μια ορθογώνια ταινία επιφάνειας  $dA=xds$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 6α και χρησιμοποιώντας την εξίσωση του κύκλου, υπολογίζουμε ότι το  $x$  δίνεται από τη σχέση:

$$x = 2\sqrt{R^2 - s^2} \quad (18b)$$

όπου  $R$  είναι η ακτίνα του κυκλικού ανοίγματος. Το ολοκλήρωμα τότε γίνεται:

$$E_P = \frac{2E_A}{r_o} \int_{-R}^R e^{isk \sin \theta} \sqrt{R^2 - s^2} ds \quad (18c)$$

Με τις αντικαταστάσεις  $v=s/R$  και  $\gamma=kR \sin(\theta)$  το ολοκλήρωμα παίρνει τη μορφή

$$E_P = \frac{2E_A R^2}{r_o} \int_{-1}^{+1} e^{i\gamma v} \sqrt{1-v^2} dv \quad (18d)$$

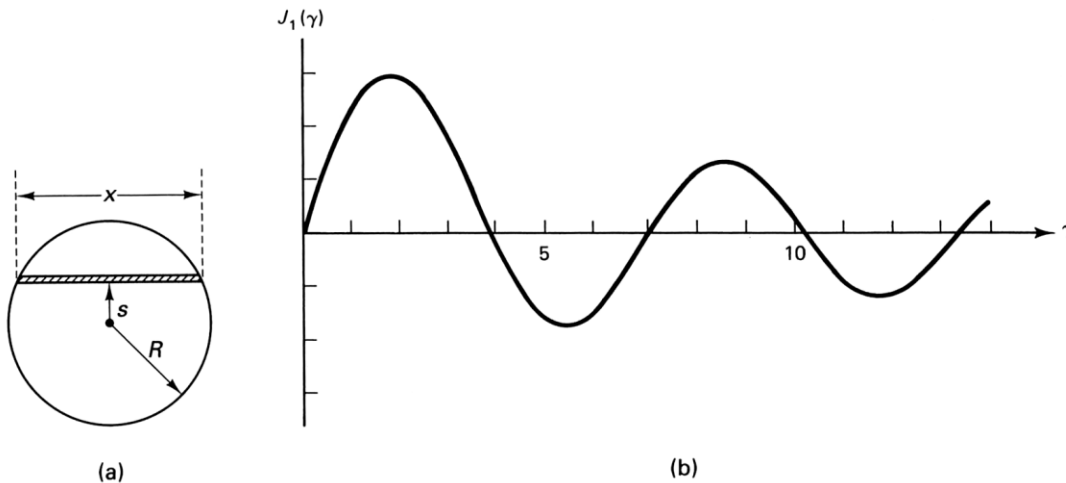
Η τιμή του ολοκληρώματος είναι:

$$\int_{-1}^{+1} e^{i\gamma v} \sqrt{1-v^2} dv = \frac{\pi J_1(\gamma)}{\gamma} \quad (18e)$$

όπου  $J_1(\gamma)$  είναι μια συνάρτηση Bessel πρώτης τάξης που εκφράζεται από τη σειρά

$$J_1(\gamma) = \frac{\gamma}{2} - \frac{(\gamma/2)^3}{1^2 \cdot 2} + \frac{(\gamma/2)^5}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3} - \dots \quad (18f)$$

Από τη σειρά αυτή βλέπουμε ότι το όριο της  $J_1(\gamma)/\gamma$ , για  $\gamma \rightarrow 0$ , είναι το  $1/2$ . Επομένως, για την κυκλική οπή αντί για συνάρτηση  $\sin$  που είχαμε στην ορθογώνια σχισμή, έχουμε την συνάρτηση *Bessel*  $J_1$ , η οποία ταλαντώνεται και αυτή όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.



**Σχήμα 6.** (α) Η γεωμετρία που χρησιμοποιήθηκε στην ολοκλήρωση για μια κυκλική οπή. (β) Η συνάρτηση *Bessel*  $J_1(\gamma)$ . Η πρώτη μηδενική τιμή είναι στο  $\gamma=3.832$ .

Για μια οπή διαμέτρου  $D$ , η κατανομή της έντασης πάνω στο πέτασμα για περίθλαση Fraunhofer μπορεί να γραφεί ως:

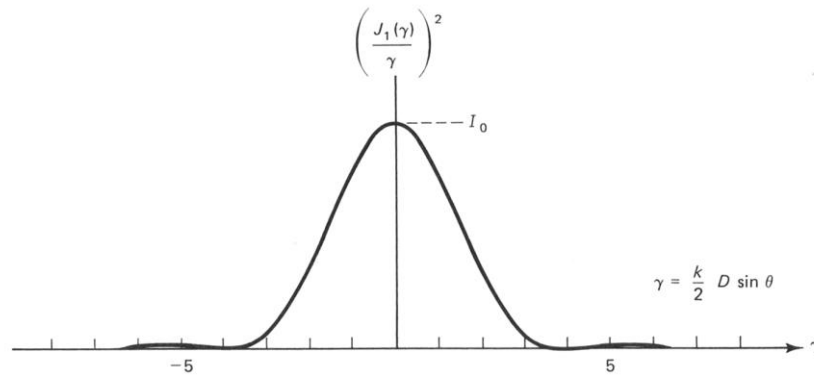


$$I = I_0 \left( \frac{2J_1(\gamma)}{\gamma} \right)^2 \quad \text{όπου} \quad \gamma \equiv \frac{1}{2} kD \sin(\theta) \quad (19)$$

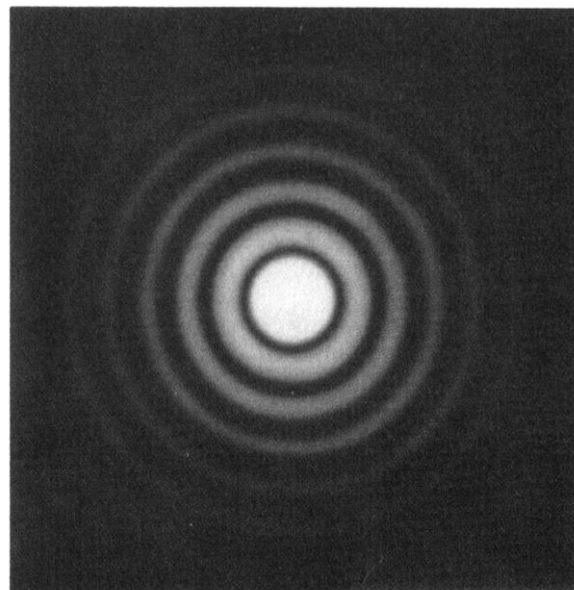
και  $I_0$  είναι η ένταση στο  $\gamma=0$ , δηλαδή  $\theta=0$ . Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 6b, η συνάρτηση  $J_1(\gamma)$  μηδενίζεται για  $\gamma=3.832$ . Δηλαδή, έχουμε  $I=0$ , όταν

$$\gamma = \frac{1}{2} kD \sin(\theta) = 3.832 \quad \text{ή όταν} \quad D \sin(\theta) = 1.22\lambda \quad (20)$$

Η εξίσωση αυτή πρέπει να συγκριθεί με την ανάλογη εξίσωση για την ορθογώνια σχισμή, (εξίσωση 12), για  $m=1$ . Βλέπουμε ότι το  $m=1$  αντικαθίσταται με το 1.22 για κυκλική οπή. Τα διαδοχικά σημεία μηδενισμού βρίσκονται από τις ρίζες της  $J_1(\gamma)$ . Στο Σχήμα 7 φαίνονται η συνάρτηση  $(J_1(\gamma)/\gamma)^2$  και μια πραγματική φωτογραφία της έντασης στο πέτασμα.



(a)



(b)

**Σχήμα 7.** (a) Κατανομή της έντασης για μια κυκλική οπή. Το μεγαλύτερο τμήμα αυτής της έντασης εμφανίζεται στο κέντρο. (b) Πραγματική εικόνα κατανομής της έντασης για μια κυκλική οπή.

Το κεντρικό τμήμα αντιστοιχεί στη μηδενική τάξη της περίθλασης. Ο κύκλος αυτός είναι γνωστός ως δίσκος του Airy. Η γωνία υπό την οποία φαίνεται ο δίσκος Airy από το επίπεδο της οπής σύμφωνα με τη σχέση (20) είναι περίπου:

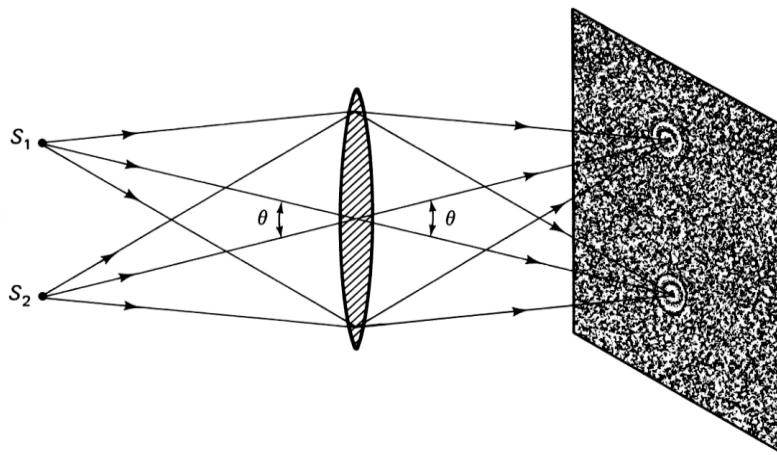
$$\Delta\theta = \frac{1.22\lambda}{D} \quad (21)$$

### 2.5 Διακριτική ικανότητα

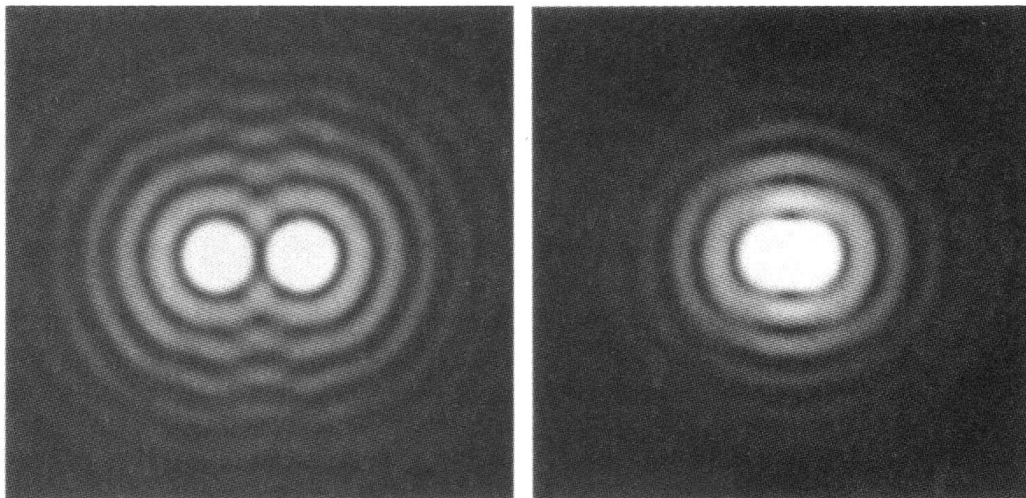
Από τη σχέση (21) βλέπουμε ότι η γωνιακή απόκλιση μιας παράλληλης δέσμης διαμέτρου  $D$  είναι δεδομένη για τον κεντρικό λοβό της περίθλασης. Για την περίπτωση που προσπαθούμε να απεικονίσουμε ένα πολύ μακρινό αντικείμενο (ένα άστρο) πάνω σε μια φωτογραφική πλάκα η περίθλαση που αντιστοιχεί στο άνοιγμα του φακού θα απεικονίζεται στην πλάκα ως ένας δίσκος του Airy με  $\Delta\theta$ :

$$\Delta\theta = \frac{1.22\lambda}{D}$$

για τον κεντρικό λοβό.



(a)



(b)

(c)

**Σχήμα 8.** (a) Είδωλα των  $S_1$  και  $S_2$  που σχηματίζονται στο πέτασμα από ένα φακό. Όσο οι δίσκοι Airy που σχηματίζονται για κάθε πηγή είναι χωριστά τα είδωλα ξεχωρίζουν. (b) Όταν οι πηγές  $S_1$  και  $S_2$  πλησιάζουν, οι δίσκοι Airy πλησιάζουν επίσης. Στην περίπτωση αυτή τα είδωλα είναι ακόμη χωριστά. (c) Τα είδωλα

των πηγών  $S_1$  και  $S_2$  όταν πλησιάζουν τόσο ώστε μόλις να ξεχωρίζουν (η απόσταση των κέντρων των δίσκων ισούται με την ακτίνα των δίσκων).

Για ένα άλλο σημείο θα έχουμε αντίστοιχα έναν άλλο δίσκο Airy. Χρειάζεται επομένως ένα κριτήριο διαχωρισμού των δύο σημείων. Σύμφωνα με το κριτήριο του Rayleigh η ελάχιστη γωνιακή απόκλιση δίνεται όταν οι δύο δίσκοι Airy έχουν κέντρα που απέχουν την ακτίνα των δίσκων. Στην περίπτωση αυτή έχουμε για το όριο της διακριτικής ικανότητας:

$$(\Delta\theta)_{\min} = \frac{1.22\lambda}{D} \quad (22)$$

όπου  $D$  είναι τώρα η διάμετρος του φακού εστίασης μιας και καθορίζει το άνοιγμα της οπής που προκαλεί την περίθλαση. Μπορούμε σύμφωνα με την (22) να αυξήσουμε τη διακριτική ικανότητα αυξάνοντας τη διάμετρο του φακού και χρησιμοποιώντας μικρότερο μήκος κύματος. Στο Σχήμα 8 φαίνονται τα είδωλα δύο πηγών ως δίσκοι Airy.

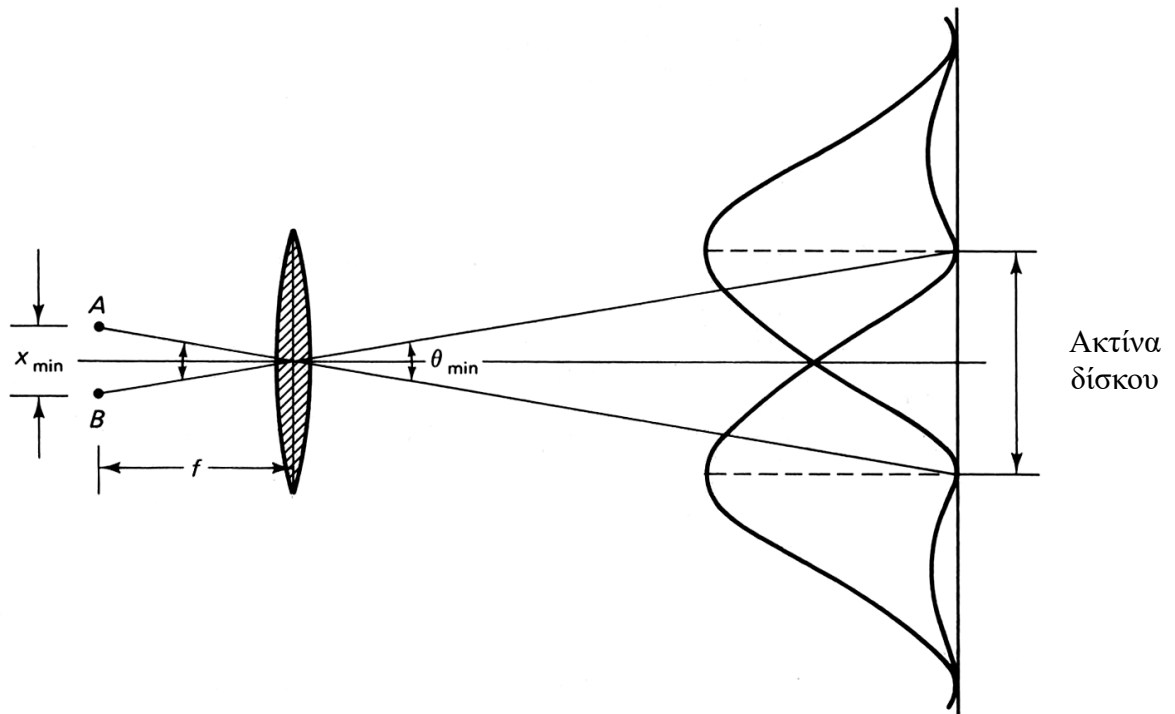
Στο Σχήμα 9 φαίνεται η θέση των δίσκων Airy που αντιστοιχούν στο κριτήριο Rayleigh. Στο Σχήμα 10 φαίνεται η ελάχιστη γωνιακή διακριτική ικανότητα που για ένα φακό μικροσκοπίου. Τα μέγιστα των δίσκων Airy απέχουν μεταξύ τους όσο η ακτίνα του δίσκου.

Η ελάχιστη απόσταση  $x_{\min}$  μεταξύ δύο σημείων  $A$  και  $B$  που είναι σε εστιακό επίπεδο ενός φακού, Σχήμα 10, αν υποθέσουμε ότι ισχύει η περίθλαση Fraunhofer, θα είναι

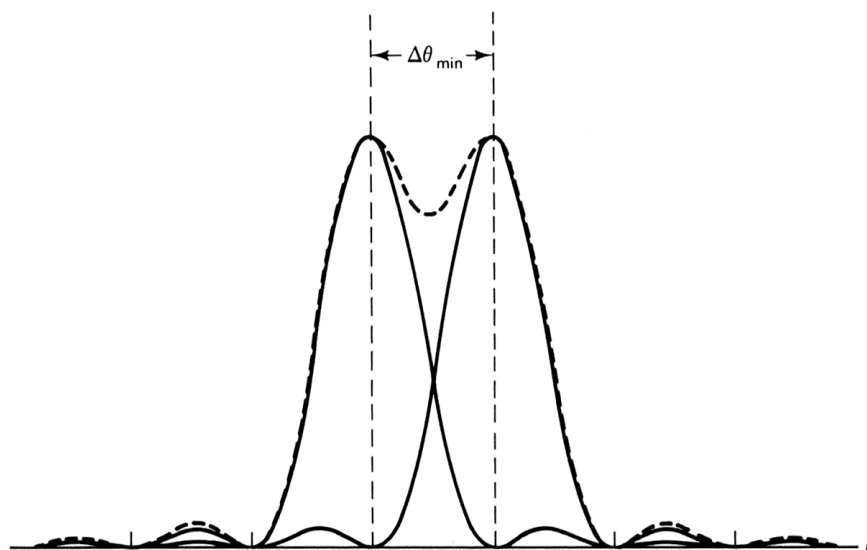
$$x_{\min} = f\theta_{\min} = f\left(\frac{1.22\lambda}{D}\right) \quad (22a)$$

Ο λόγος  $D/f$  ονομάζεται *αριθμητικό άνοιγμα* του φακού (numerical aperture). Για ένα καλό φακό με  $D/f=1.2$  έχουμε

$$x_{\min} \cong \lambda \quad (22b)$$



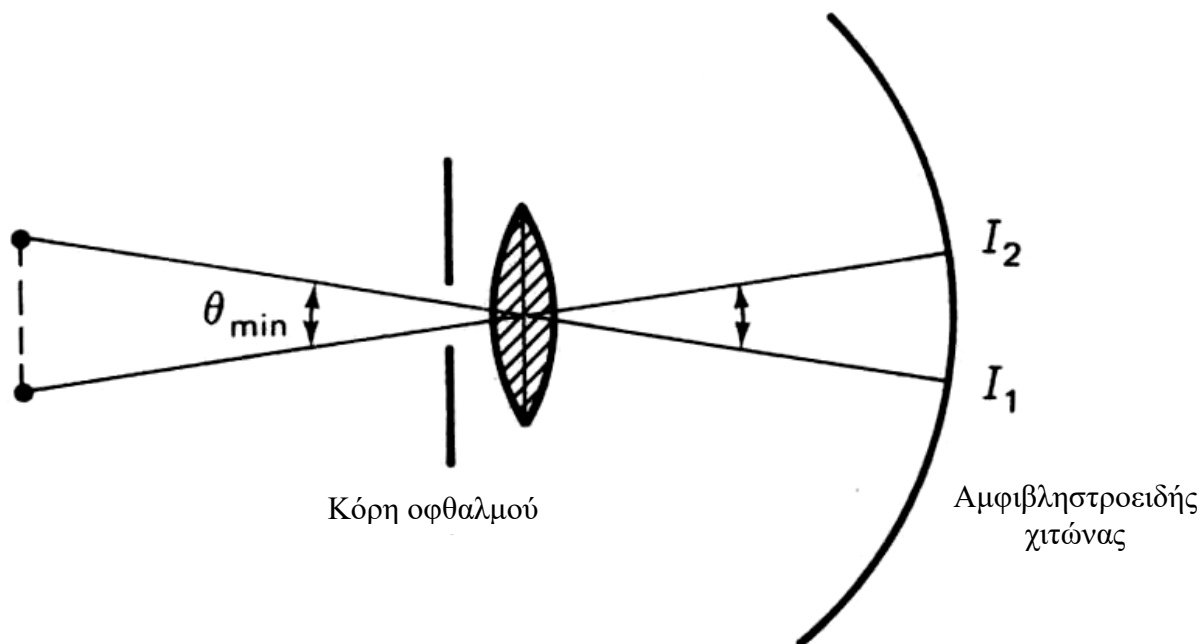
**Σχήμα 9.** Το κριτήριο Rayleigh για δύο σημεία περίθλασης που μόλις ξεχωρίζουν.



**Σχήμα 10.** Ελάχιστη γωνιακή διακριτική ικανότητα για ένα φακό.

**Διακριτική ικανότητα του οφθαλμού:**

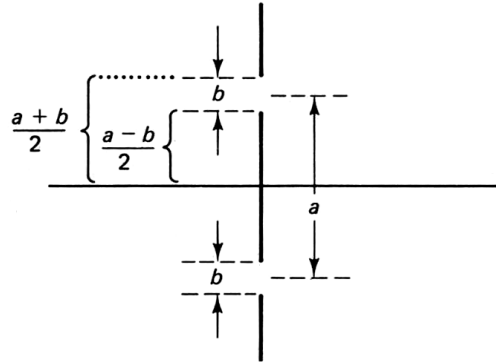
Κατά τη διάρκεια μιας ηλιόλουστης ημέρας η διάμετρος της ίριδας του οφθαλμού είναι περίπου  $2\text{mm}$ . Από τη σχέση (22) βρίσκουμε για  $\lambda=550\text{nm}$  ότι  $\Delta\theta_{\min}=33.6 \times 10^{-5}\text{ rad}$ . Για απόσταση  $40\text{cm}$  από τον οφθαλμό θα έχουμε  $x=(40\text{cm})\sin(\theta_{\min}/2)=(40\text{cm})(\theta_{\min}/2)=670 \times 10^{-4}\mu\text{m}=67\mu\text{m}$ . Τη νύχτα η ίριδα ανοίγει και μπορεί να φθάσει και τα  $8\text{mm}$ , οπότε αυξάνει η διακριτική ικανότητα ανάλογα. Στο Σχήμα 11 φαίνεται η διάταξη του οφθαλμού.



**Σχήμα 11.** Διάταξη του οφθαλμού με την ίριδα να περιορίζει την είσοδο και να καθορίζει την διακριτική ικανότητα.

## 2.6 Περίθλαση από διπλή σχισμή

Στην περίπτωση αυτή οι υπολογισμοί είναι παρόμοιοι με αυτούς της μιας σχισμής, εξίσωση (4). Τα όρια της ολοκλήρωσης αλλάζουν και είναι αυτά που φαίνονται στο Σχήμα 12.



Σχήμα 12. Καθορισμός των ορίων για την περίθλαση των δύο σχισμών.

Για το πλάτος  $E_R$  θα έχουμε

$$E_R = \frac{E_L}{r_o} \int_{-(a+b)/2}^{-(a-b)/2} e^{iks \sin \theta} ds + \frac{E_L}{r_o} \int_{(a-b)/2}^{(a+b)/2} e^{iks \sin \theta} ds \quad (23)$$

Ολοκλήρωση και αντικατάσταση των ορίων δίνει

$$E_R = \frac{E_L}{r_o} \frac{1}{ik \sin \theta} \left( e^{ik \sin \theta (-a+b)/2} - e^{ik \sin \theta (-a-b)/2} + e^{ik \sin \theta (a+b)/2} - e^{ik \sin \theta (a-b)/2} \right) \quad (23a)$$

Εισάγοντας τις τιμές για  $\beta$  και  $\alpha$  όπως στις (7) και (17), έχουμε

$$\beta \equiv \frac{1}{2} kb \sin \theta \quad (24)$$

$$\alpha \equiv \frac{1}{2} ka \sin \theta \quad (25)$$

Η εξίσωση (23a) γράφεται πιο συμπυκνωμένα ως

$$E_R = \frac{E_L}{r_o} \frac{b}{2i\beta} \left( e^{i\alpha} (e^{i\beta} - e^{-i\beta}) + e^{-i\alpha} (e^{i\beta} - e^{-i\beta}) \right) \quad (25a)$$

Εφαρμόζοντας την εξίσωση Euler έχουμε

$$E_R = \frac{E_L}{r_o} \frac{b}{2i\beta} (2i \sin \beta)(2 \cos \alpha) \quad (25b)$$

και τελικά

$$E_R = \frac{2E_L b \sin \beta}{r_o \beta} \cos \alpha. \quad (26)$$

Η ένταση δίνεται τώρα από την

$$I = \left( \frac{\epsilon_o c}{2} \right) E_R^2 = \left( \frac{\epsilon_o c}{2} \right) \left( \frac{2E_L b}{r_o} \right)^2 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \cos^2 \alpha \quad (26a)$$

ή, από την

$$I = 4I_o \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \cos^2 \alpha \quad (27)$$

όπου

$$I_o = \left( \frac{\epsilon_o c}{2} \right) \left( \frac{E_L b}{r_o} \right)^2 \quad (27a)$$

όπως καθορίστηκε από την (10) για την απλή σχισμή. Από την (27) φαίνεται ότι η ένταση στο κέντρο είναι τώρα  $4I_o$ . Αυτό είναι αναμενόμενο όταν οι δέσμες είναι σε φάση και τα πλάτη προστίθενται.

Επιστρέφοντας στην (27) βλέπουμε ότι ο όρος  $(\sin \beta / \beta)^2$  αντιστοιχεί στην περίθλαση απλής σχισμής και ο όρος  $\cos^2 \alpha$  αντιστοιχεί στη συμβολή των κυμάτων από τις δύο σχισμές. Ο όρος  $\cos^2 \alpha$  με τη χρήση της (25) γράφεται :

$$\cos^2 \alpha = \cos^2 \left[ \frac{ka(\sin \theta)}{2} \right] = \cos^2 \left[ \frac{\pi a(\sin \theta)}{\lambda} \right] \quad (27b)$$

και είναι ισοδύναμη έκφραση με αυτή που προκύπτει στο πείραμα Young.

Οι ημιτονοειδείς όροι της εξίσωσης (27) εμφανίζονται στο Σχήμα 13(a) για την περίπτωση  $a=6b$ , ή,  $\alpha=6\beta$ .

Επειδή  $a>b$ , ο όρος  $\cos^2 \alpha$  αλλάζει πιο γρήγορα από τον  $(\sin \beta / \beta)^2$ . Το γινόμενο των όρων μπορεί να θεωρηθεί ως μια τροποποίηση του πλάτους των κροσσών συμβολής όπως φαίνεται στο Σχήμα 13(b). Η καμπύλη της περίθλασης μηδενίζεται όταν  $\beta = m\pi$ ,  $m = \pm 1, \pm 2, \dots$ . Αναφορικά με τη γωνία  $\theta$ , αυτή η συνθήκη γίνεται

$$\text{Ελάχιστα περίθλασης: } m\lambda = b \sin \theta \quad (28)$$

Όταν αυτά τα ελάχιστα συμπίπτουν με μέγιστο των κροσσών τότε ο αντίστοιχος κροσσός δεν εμφανίζεται.

Οι κροσσοί συμβολής έχουν μέγιστα για  $\alpha = p\pi$ , με  $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  ή όταν

$$\text{Μέγιστα συμβολής: } p\lambda = a \sin \theta \quad (29)$$

Όταν οι συνθήκες (28) και (29) ικανοποιούνται για το ίδιο  $\theta$ , τότε διαιρώντας τις δύο εξισώσεις βρίσκουμε τις συνθήκες για τις απουσιάζουσες τάξεις των κροσσών συμβολής.

Έτσι, η συνθήκη για μη εμφανιζόμενους κροσσούς είναι

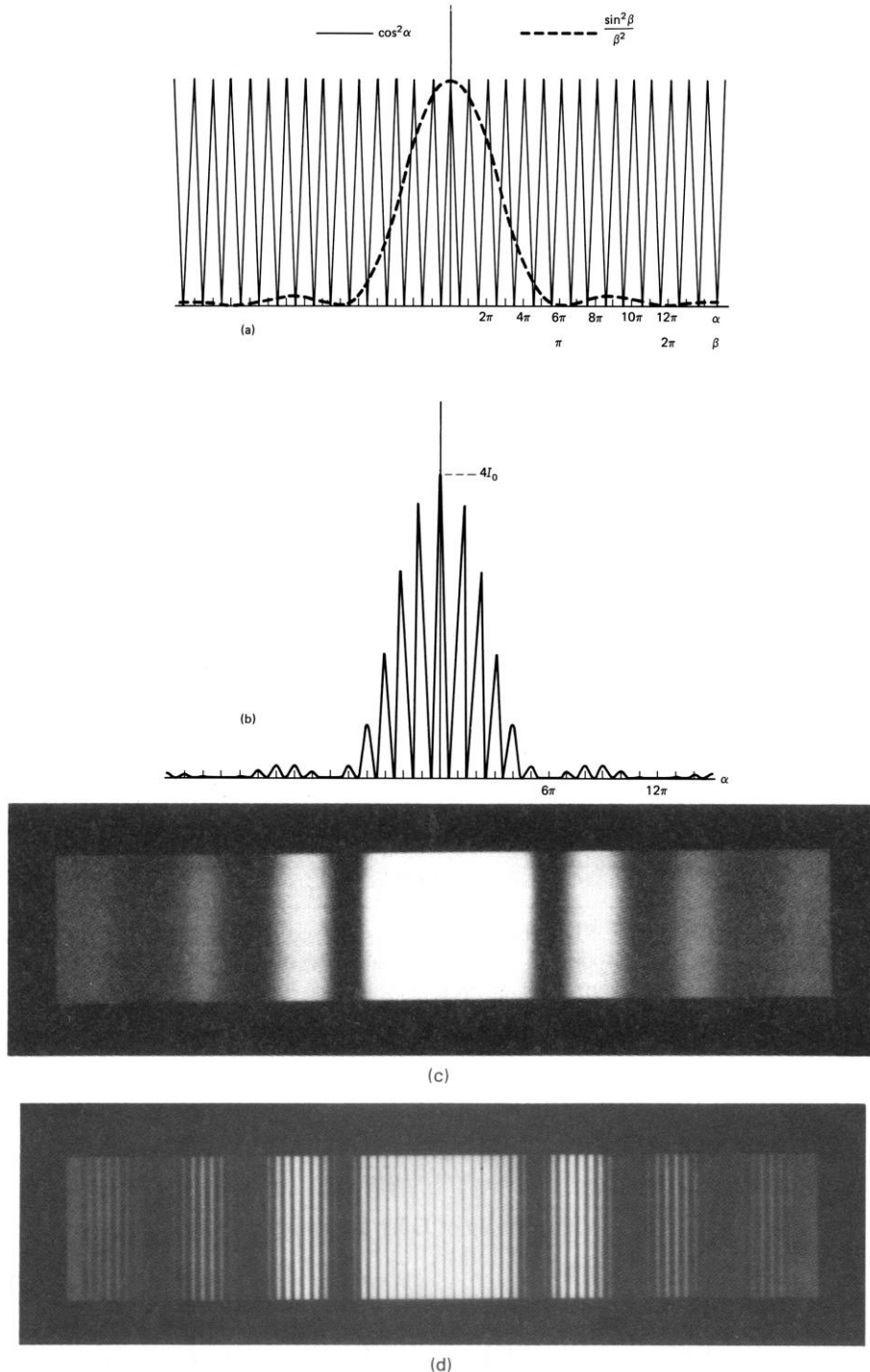
$$a = \left( \frac{p}{m} \right) b \quad (30)$$

ή

$$\alpha = \left( \frac{p}{m} \right) \beta \quad (30a)$$



Επομένως, όταν η απόσταση των σχισμών είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του πάχους της μιας σχισμής, τότε η συνθήκη ικανοποιείται. Για παράδειγμα, όταν  $a=2b$ , τότε  $p=2m=\pm 2, \pm 4, \pm 6$  δίνει τις εξαφανισμένες τάξεις της συμβολής. Για το Σχήμα 13(a) έχουμε  $a=6b$  και οι χαμένες τάξεις είναι αυτές με  $p=\pm 6, \pm 12$  κλπ. Όταν  $a=Nb$  και  $N$  μεγάλο, τότε η πρώτη τάξη που δεν εμφανίζεται είναι η  $p=\pm N$  και είναι μακριά από την κεντρική περιοχή. Επομένως για να πάρουμε συμβολή με το πείραμα Young θα επιλέξουμε  $a \gg b$  για να μην επηρεάζονται οι κροσσοί συμβολής από την περίθλαση.



**Σχήμα 13:** (a) Συναρτήσεις συμβολής (πλήρης γραμμή) και περίθλασης (διακεκομμένη), σχεδιασμένες για μια διπλή σχισμή όταν η απόσταση των σχισμών είναι έξι φορές το πάχος της σχισμής ( $a=6b$ ). (b) Η ένταση



για τη διπλή σχισμή του (a). Η καμπύλη είναι το γινόμενο του αποτελέσματος της συμβολής και της περίθλασης Fraunhofer. (c) Περίθλαση Fraunhofer απλής σχισμής, φωτογραφία. (d) Περίθλαση και συμβολή από διπλή σχισμή με κάθε σχισμή ωσάν αυτή που παρήγαγε τη φωτογραφία του (c).

### 2.7 Περίθλαση από πολλές σχισμές

Για την περίθλαση από πολλές παράλληλες σχισμές (οπτικό φράγμα, *grating*) η εξίσωση (23) και το Σχήμα 12 επεκτείνονται για να καλυφθούν οι  $N$  σχισμές που υποθέτουμε ότι υπάρχουν στο σύστημα. Κάθε  $j$  αντιστοιχεί σε μια σχισμή οπότε έχουμε για το πλάτος του κύματος στο πέτασμα:

$$E_R = \frac{E_L}{r_o} \sum_{j=1}^{N/2} \left\{ \int_{l-(2j-1)a-b/2}^{l-(2j-1)a+b/2} e^{isk \sin \theta} ds + \int_{l(2j-1)a-b/2}^{l(2j-1)a+b/2} e^{isk \sin \theta} ds \right\} \quad (31)$$

Καθώς το  $j$  αυξάνεται ένα ζεύγος σχισμών τίθεται κάτω από την αρχή του άξονα και επάνω (πρώτο και δεύτερο ολοκλήρωμα). Όταν  $j=N/2$  όλες οι σχισμές έχουν υπολογισθεί. Υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα έχουμε

$$I = \frac{1}{ik \sin \theta} \left( e^{-ik \sin \theta [(2j-1)a-b]/2} - e^{-ik \sin \theta [(2j-1)a+b]/2} \right) + \frac{1}{ik \sin \theta} \left( e^{ik \sin \theta [(2j-1)a+b]/2} - e^{ik \sin \theta [(2j-1)a-b]/2} \right) \quad (31a)$$

Χρησιμοποιώντας τις (24) και (25) για τα  $a$  και  $\beta$  λαμβάνουμε

$$I = \frac{b}{2i\beta} \left( e^{-i(2j-1)\alpha} (e^{i\beta} - e^{-i\beta}) + e^{i(2j-1)\alpha} (e^{i\beta} - e^{-i\beta}) \right) \quad (31b)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση του Euler η (31b) γράφεται

$$I = \frac{b}{2i\beta} (2i \sin \beta) [2 \cos((2j-1)\alpha)] \quad (31c)$$

ή

$$I = 2b \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right) \text{Re} \left[ e^{i(2j-1)\alpha} \right] \quad (31d)$$

όπου το  $\cos$  είναι το πραγματικό τμήμα του εκθετικού τμήματος. Επιστρέφοντας στην (31) αθροίζουμε :

$$S = 2b \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right) \text{Re} \left[ \sum_{j=1}^{N/2} e^{i(2j-1)\alpha} \right] \quad (31e)$$

και αντικαθιστώντας το άθροισμα παίρνουμε :

$$S = 2b \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right) \text{Re} \left[ e^{i\alpha} + e^{i3\alpha} + e^{i5\alpha} + \dots + e^{i(N-1)\alpha} \right] \quad (31f)$$

Η σειρά εντός των αγκυλών είναι μια γεωμετρική σειρά με πρώτο όρο το  $A=e^{i\alpha}$  και λόγο  $r=e^{2i\alpha}$ , οπότε :

$$A \left( \frac{r^n - 1}{r - 1} \right) = e^{i\alpha} \left[ \frac{(e^{2i\alpha})^{N/2} - 1}{e^{2i\alpha} - 1} \right] = \frac{e^{iN\alpha} - 1}{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}} \quad (31g)$$

Χρησιμοποιώντας ξανά την εξίσωση του Euler η εξίσωση αυτή γράφεται

$$\frac{(\cos N\alpha - 1) + i \sin N\alpha}{2i \sin \alpha} = \frac{i(\cos N\alpha - 1) - \sin N\alpha}{-2 \sin \alpha} \quad (31h)$$

της οποίας το πραγματικό τμήμα είναι  $\sin(N\alpha)/(2 \sin(\alpha))$ . Τότε

$$S = b \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right) \left( \frac{\sin(N\alpha)}{\sin \alpha} \right) \quad (31i)$$

και

$$E_R = \frac{E_L b}{r_o} \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right) \left( \frac{\sin(N\alpha)}{\sin \alpha} \right) \quad (31j)$$

Παίρνοντας το τετράγωνο για την ένταση έχουμε τη σχέση:

$$I = I_o \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \left( \frac{\sin(N\alpha)}{\sin \alpha} \right)^2 \quad (32)$$

όπου το  $I_o$  εμπεριέχει όλες τις σταθερές.

Ο παράγων  $\beta$  αντιστοιχεί στη γωνοστή πια περίθλαση και καθορίζει το πλάτος των γραμμών συμβολής.

Ο όρος  $\left[ \frac{\sin(N\alpha)}{\sin \alpha} \right]^2$  καθορίζει την συμβολή μεταξύ των κυμάτων που προέρχονται από τις  $N$  σχισμές. Για  $\alpha=0$  ή κάποιο πολλαπλάσιο του  $\pi$ , η έκφραση γίνεται απροσδιόριστη. Εφαρμόζοντας τον κανόνα του L' Hospital για  $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$  έχουμε

$$\lim_{\alpha \rightarrow m\pi} \frac{\sin(N\alpha)}{\sin \alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow m\pi} \frac{N \cos(N\alpha)}{\cos \alpha} = \pm N \quad (32a)$$

οπότε τα κύρια μέγιστα της συμβολής έχουν πλάτος ανάλογο του  $N^2$ . Η συμβολή για  $N=8$  και θετικό  $\alpha$  εμφανίζεται στο Σχήμα 14(a). η ένταση εμφανίζεται στο 14(b). Σημειώστε ότι τα κυρίως μέγιστα απέχουν μεταξύ τους κατά  $N-2$  μικρά μέγιστα. Η κατάσταση περιγράφεται πλήρως από τις εξισώσεις

$$\text{με } \alpha = \frac{p\pi}{N}, \text{ ή, } a \sin \theta = \frac{p\lambda}{N}, \quad p=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (33)$$

**Κύρια μέγιστα** έχουμε για  $p = 0, \pm N, \pm 2N, \dots$

**Ελάχιστα** έχουμε για  $p=$ όλες τις άλλες τιμές

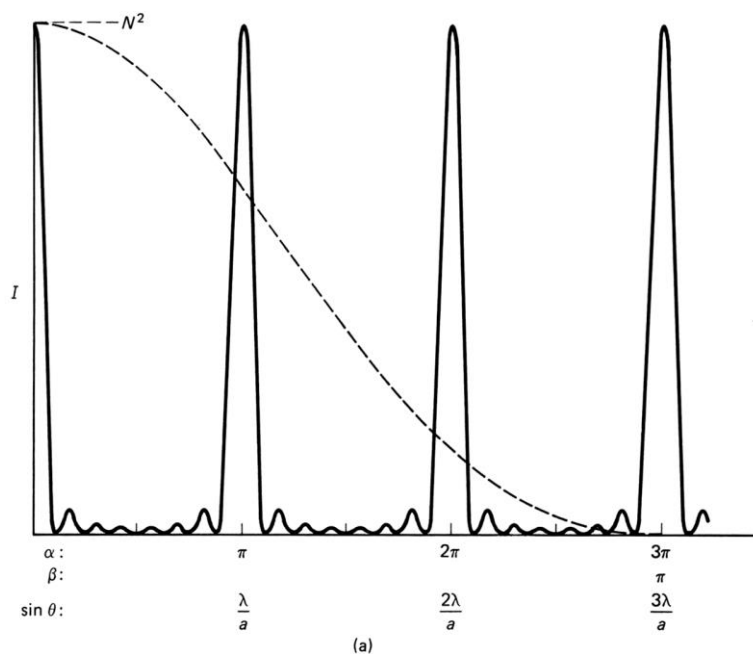
Μία πρακτική διάταξη που χρησιμοποιεί την περίθλαση από πολλές σχισμές είναι το λεγόμενο *οπτικό φράγμα* (diffraction grating), που θα εξετασθεί εκτενώς στο Κεφάλαιο 7.

Σύμφωνα με την εξίσωση (33), κύρια μέγιστα έχουμε για  $p/N=m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , οπότε η εξίσωση του οπτικού φράγματος είναι:

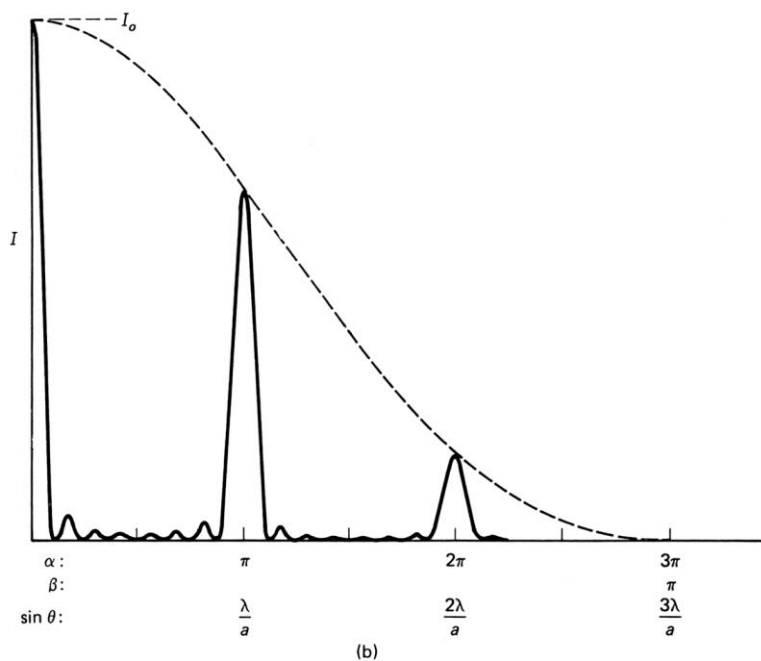
$$m\lambda = a \sin \theta \quad (34)$$

όπου  $m$  ονομάζεται τάξη της περίθλασης, με  $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,  $a$ , η απόσταση μεταξύ των διαδοχικών σχισμών και  $\theta$  η γωνιακή απόκλιση. Η ίδια εξίσωση βρίσκεται αν αναλύσουμε την καθυστέρηση μεταξύ δύο διαδοχικών κυμάτων από τις σχισμές στο Σχήμα 15. Έχουμε  $AB = a \sin \theta$ . Αν το  $AB$  ισούται με ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος, τότε θα έχουμε πρόσθεση των πλατών των κυμάτων και η εξίσωση (34) προκύπτει αμέσως.

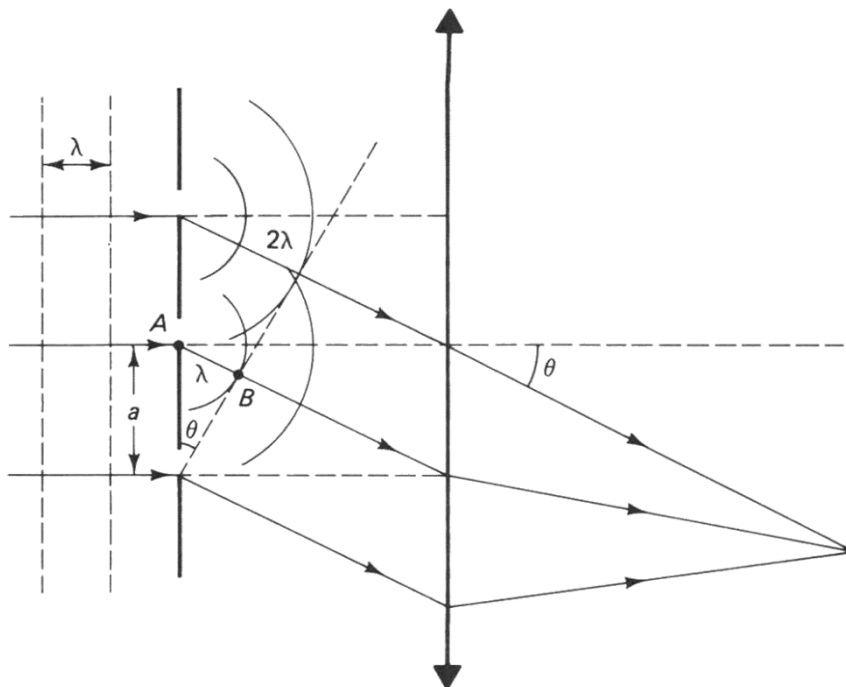
Στην εξίσωση (34) υπάρχει περίπτωση το  $a \sin \theta$  να ισούται με διάφορους συνδυασμούς του γινομένου  $m\lambda$ . Για παράδειγμα το  $\lambda$  στην πρώτη τάξη να συμπίπτει με το  $\lambda/2$  στη δεύτερη τάξη και ούτω καθ' εξής. Το οπτικό φράγμα παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον από πλευράς ανάλυσης ενός φάσματος και διακριτικής ικανότητας γι' αυτό θα αναφερθούμε διεξοδικά στο Κεφάλαιο 7.



**Σχήμα 14.** (a) Συναρτήσεις συμβολής (πλήρης γραμμή) και περίθλασης (διακεκομμένη γραμμή) Fraunhofer όταν  $N=8$  και  $a=3b$ .



**Σχήμα 14(συνέχεια)** (b) Η προκύπτουσα ένταση για την περίπτωση (a). Η ένταση περιορίζεται από την ύπαρξη της περίθλασης (διακεκομμένη γραμμή).



**Σχήμα 15.** Διάγραμμα οπτικού φράγματος που φωτίζεται από ένα επίπεδο μονοχρωματικό κύμα. Φαίνεται ο σχηματισμός ενός πρώτης τάξεως μεγίστου.

### 3. Περιγραφή της πειραματικής διάταξης

Για την μελέτη του φαινομένου της περίθλασης Fraunhofer, θα χρησιμοποιήσουμε:

- Ένα laser He-Ne
- Απλές σχισμές διαφόρων διαστάσεων
- Διπλές σχισμές
- Κυκλικές οπές
- Πολλαπλές σχισμές
- Πλέγματα
- Πέτασμα βαθμονομημένο
- Ανιχνευτή έντασης
- Φακό εστίασης

### 4. Εκτέλεση του πειράματος

#### 4.1 Περίθλαση από λεπτή σχισμή

Χρησιμοποιώντας τη συνθήκη για τα ελάχιστα της έντασης,  $b \sin \theta = m\lambda$ ,  $m = \pm 1, \pm 2, \dots$ , όπου  $b$  ο πλάτος της σχισμής και  $2\theta$  η γωνία που σχηματίζει η σχισμή με τα δύο πρώτα ελάχιστα, για να προσδιορίσετε το πλάτος της σχισμής  $b$ . Δίδεται  $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ .

Πάρτε αρκετές μετρήσεις για να βρείτε μέσο όρο του  $b$  για διάφορες τάξεις  $m$ .

#### 4.2 Υπολογισμός απόστασης όπου ισχύει η περίθλαση Fraunhofer.

Υπολογίστε αν η θέση της απόστασης του πετάσματος από το επίπεδο της σχισμής πληροί τη συνθήκη για περίθλαση Fraunhofer. Αν όχι, επαναλάβετε τη μέτρηση ( $\alpha$ ).

$$L \gg \frac{b^2}{\lambda}$$

**4.3 Με το φωτόμετρο μετρήστε και καταγράψτε την κατανομή της έντασης.**

Σχολιάστε αν η ένταση έχει μορφή *sinc*.

**4.4 Περίθλαση από κυκλική οπή.**

Από τη θέση των ελαχίστων (δύο πρώτων) προσδιορίστε τη γωνία  $\Delta\theta$  του δίσκου Airy και από αυτή το άνοιγμα της κυκλικής οπής  $D$ .

$$\Delta\theta = \frac{1.22\lambda}{D}$$

**4.5 Κριτήριο Rayleigh**

Σύμφωνα με το κριτήριο Rayleigh η ελάχιστη απόσταση για την διάκριση δύο δίσκων Airy είναι (βλέπε και Σχήμα 10)

$$\Delta\theta_{\min} = \frac{1.22\lambda}{D}$$

Για το μήκος  $\lambda = 632.8 \text{ nm}$  του laser He-Ne υπολογίστε το  $\Delta\theta_{\min}$  για το άνοιγμα της ίριδας του οφθαλμού ( $D=2\text{mm}$ ) καθώς και την απόσταση δύο σημείων που μπορείτε να διακρίνετε στο 1m.

**4.6 Περίθλαση – συμβολή από δύο σχισμές.**

1. Παρατηρήστε την κατανομή της έντασης και σχολιάστε το φαινόμενο.
2. Από τις μη εμφανιζόμενες τάξεις της συμβολής και το πάχος της σχισμής που βρήκατε ήδη, υπολογίστε την απόσταση των σχισμών - βλέπετε Σχήμα 12 και εξισώσεις (28) - (30).

**4.7 Περίθλαση από πολλές σχισμές.**

1. Παρατηρήστε την κατανομή των εντάσεων στο χώρο και σχολιάστε όταν φωτίζεται το οπτικό φράγμα από ένα laser He-Ne. Σχολιάστε.
2. Από την εξίσωση του οπτικού φράγματος (34) υπολογίστε την απόσταση μεταξύ δύο σχισμών και τον αριθμό των σχισμών/mm, μετρώντας τη γωνία  $\theta$  μεταξύ των τάξεων  $m=0$  και  $m = \pm 1$ .  
 $m\lambda = a \sin \theta$  (34) όπου  $m$  η τάξη της περίθλασης και  $a$  η απόσταση δύο διαδοχικών σχισμών (Σχήμα 15).

**5. Προβλήματα**

1. Τα δύο φώτα ενός αυτοκινήτου απέχουν 1m. Από πόσο μακριά μπορεί να τα ξεχωρίσει ένας άνθρωπος με ίριδα 5mm; Υποθέστε μέσο μήκος κύματος 555nm.
2. Το Αστεροσκοπείο του Σκίνακα του Πανεπιστημίου Κρήτης έχει ένα τηλεσκόπιο με άνοιγμα φακού 1m και εστιακή απόσταση 10m. Υπολογίστε την ακτίνα του πρώτου και του δευτέρου δακτυλίου του δίσκου Airy που σχηματίζεται από ένα αστέρι στο εστιακό επίπεδο. Τα πρώτα δύο δευτερεύοντα μέγιστα της συνάρτησης  $[J_1(\gamma)/\gamma]^2$  λαμβάνουν χώρο για  $\gamma=5.14$  και  $\gamma=8.42$ .
3. Ένα CO<sub>2</sub> laser παράγει ακτίνα 10.6μm διαμέτρου 1mm και ισχύος 2KW. Στην έξοδο το άνοιγμα της δέσμης περιορίζεται μόνο από την περίθλαση και λόγω ταλάντωσης σε πολλές συχνότητες και χωρικές κατανομές η ένταση στην έξοδο είναι ομοιόμορφη. Υπολογίστε τη διάμετρο της επιφάνειας που θα έχει το laser όταν φθάσει στη Σελήνη η οποία απέχει 376.000km. Ποια θα είναι η αντίστοιχη ένταση στην εκεί επιφάνεια; Αν χρησιμοποιηθεί ένα τηλεσκόπιο μετά το laser που μεγεθύνει τη δέσμη στο 1m διάμετρο πόση θα είναι η αντίστοιχη διάμετρος της δέσμης στη Σελήνη;

**Βιβλιογραφία**

- F.L. Pedrotti & L.S. Pedrotti, Introduction to Optics, Prentice Hall International Editions, 1993.
- Born, Max and Emil Wolf. Principles of Optics, 5<sup>th</sup> ed. New York: Pergamon Press, 1975
- 3. Goodman, Joseph W. Introduction to Fourier Optics. New York: McGraw-Hill Book Company, 1968.



## 7. ΜΕΛΕΤΗ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ ΟΠΤΙΚΟΥ ΦΡΑΓΜΑΤΟΣ

### 1. Σκοπός

- Μελέτη ιδιοτήτων οπτικού φράγματος περίθλασης
- Μελέτη φάσματος λάμπας υδραργύρου

### 2. Θεωρία

#### Βασική προαπαιτούμενη γνώση

Serway, Physics for Scientists & Engineers, Τόμος ΙΙΙ, Κεφ. 38.4 (συμπεριλαμβανομένων των αντίστοιχων παραδειγμάτων και προβλημάτων).

#### 2.1 Εισαγωγή

Μια επαναλαμβανόμενη ακολουθία από στοιχεία περίθλασης, είτε πρόκειται για οπές (ή σχισμές) είτε από “εμπόδια”, που έχει ως αποτέλεσμα την πρόκληση περιοδικών μεταβολών στη φάση, στο πλάτος, ή και στα δυο, του αναδύομενου κύματος, λέγεται **φράγμα περίθλασης**. Η απλούστερη περίπτωση φράγματος περίθλασης είναι το φράγμα πολλών σχισμών, που ανακαλύφθηκε από τον αστρονόμο Rittenhouse το 1785. Ένα μέτωπο κύματος που συναντά ένα τέτοιο φράγμα υπόκειται σε διαμόρφωση πλάτους. Μια άλλη μορφή φράγματος περίθλασης που συναντάται πολύ πιο συχνά, είναι ένα φράγμα από παράλληλες μεταξύ τους χαραγές, πάνω στην επιφάνεια γυάλινης πλάκας. Κάθε μια από τις χαραγές αποτελεί μια πηγή σκεδασμένου φωτός και όλες μαζί σχηματίζουν μια κανονική ακολουθία από παράλληλες ευθύγραμμες πηγές. Όταν το φράγμα είναι τελείως διαφανές, έτσι ώστε να είναι αμελητέα η διαμόρφωση πλάτους, οι κανονικές μεταβολές του οπτικού πάχους κατά μήκος του φράγματος προκαλούν διαμόρφωση φάσης. Σύμφωνα με την αρχή του Huygens μπορούμε να φανταστούμε ότι τα στοιχειώδη κύματα (wavelets) εκπέμπονται με διαφορετικές φάσεις από τα διάφορα σημεία της επιφάνειας του φράγματος. Έτσι, το αναδύομενο μέτωπο κύματος εμπεριέχει περιοδικές μεταβολές του σχήματος και όχι του πλάτους του.

#### 2.2 Η εξίσωση του φράγματος

Στο Κεφάλαιο της περίθλασης, αποδείχθηκε η εξίσωση του φράγματος (εξ. 34) για την περίπτωση κάθετης πρόσπτωσης.

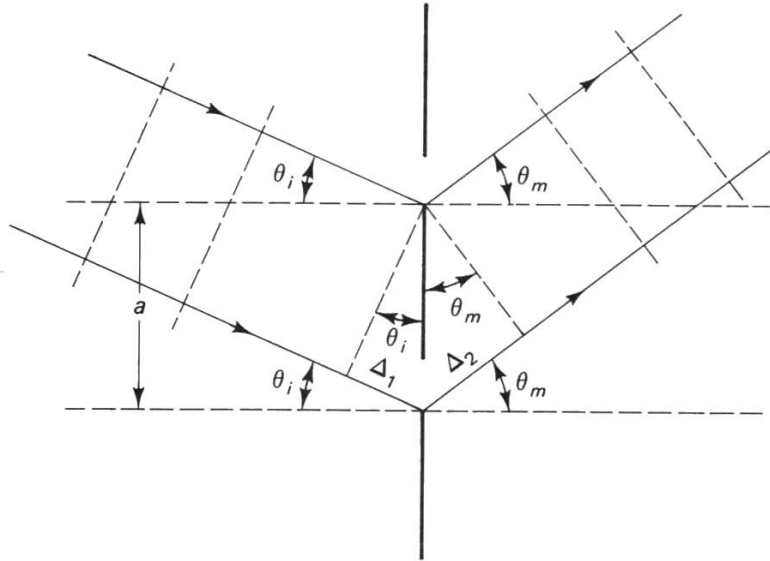
Η εξίσωση αυτή μπορεί εύκολα να γενικευθεί για την περίπτωση που τα προσπίπτοντα επίπεδα κυματικά μέτωπα φωτός σχηματίζουν μια οποιαδήποτε γωνία με την κάθετο στην επιφάνεια του φράγματος, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.

Η συνολική διαφορά δρόμου για κύματα από γειτονικές σχισμές που απέχουν κατά  $a$  είναι

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = a \sin \theta_1 + a \sin \theta_m \quad (1)$$

όπου  $a$  η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών σχισμών.

Οι δύο ημιτονικοί όροι στην εξίσωση αυτή μπορεί να αθροίζονται ή να αφαιρούνται, ανάλογα με την διεύθυνση  $\theta_m$  του φωτός που έχει υποστεί περίθλαση. Για να ισχύει η (1) για όλες τις γωνίες περίθλασης, ορίζουμε ότι η γωνία  $\theta_m$  είναι θετική όταν και η προσπίπτουσα και η περιθλώμενη ακτίνα βρίσκονται στην ίδια πλευρά της καθέτου προς το φράγμα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Διαφορετικά η γωνία  $\theta_m$  είναι αρνητική.



**Σχήμα 1:** Γειτονικές σχισμές του φράγματος, που φωτίζονται από παράλληλη φωτεινή δέσμη που προσπίπτει υπό γωνία  $\theta_i$  ως προς την κάθετο στο επίπεδο του φράγματος

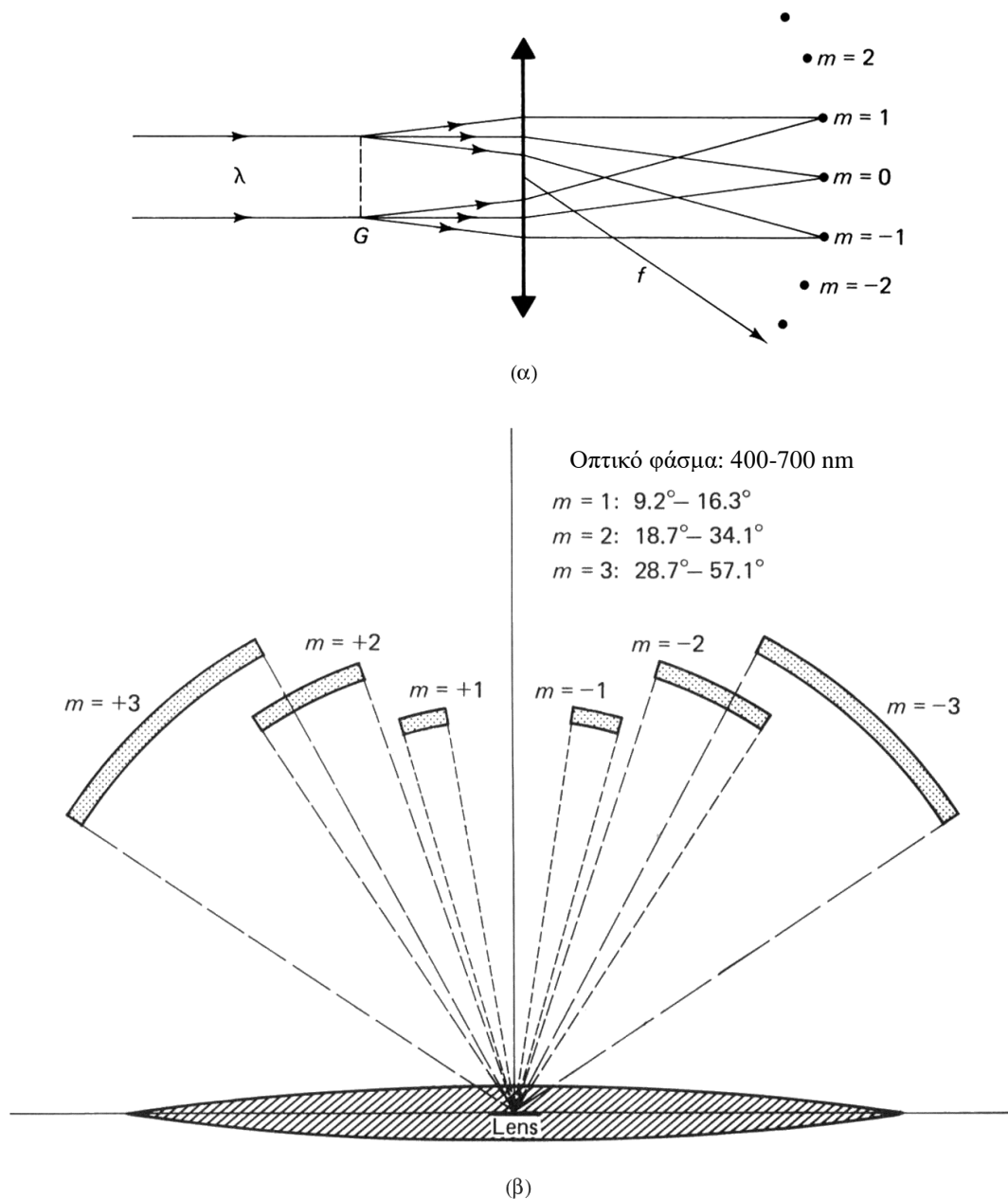
Και στις δύο περιπτώσεις, όταν η διαφορά δρόμων  $\Delta = \Delta_1 - \Delta_2 = m\lambda$ , όπου  $m$  ακέραιος, τότε όλα τα περιθλώμενα κύματα είναι σε φάση και η εξίσωση φράγματος γράφεται σαν:

$$a(\sin \theta_i + \sin \theta_m) = m\lambda \quad \text{όπου } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2)$$

Σύμφωνα με την εξίσωση αυτή, η μηδενική τάξη συμβολής,  $m=0$ , συμβαίνει για  $\theta_m = -\theta_i$ , για όλα τα  $\lambda$ . Συνεπώς, στο κεντρικό μέγιστο έχουμε φως απ' όλα τα μήκη κύματος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας. Οι μεγαλύτερες τάξεις συμβολής παράγουν “φασματικές γραμμές” εκατέρωθεν του κεντρικού μεγίστου. Για συγκεκριμένη διεύθυνση πρόσπτωσης ( $\theta_i$ ), η διεύθυνση ( $\theta_m$ ) του κάθε κύριου μεγίστου εξαρτάται από το μήκος κύματος. Για τάξεις με  $m \neq 0$ , συνεπώς, το φράγμα διαχωρίζει μεταξύ τους τα διάφορα μήκη κύματος της προσπίπτουσας φωτεινής δέσμης. Αυτή η ιδιότητα του φράγματος εξηγεί και την χρησιμότητά του ως συσκευής μέτρησης μηκών κύματος και φασματικής ανάλυσης.

Το Σχήμα 2α απεικονίζει τον σχηματισμό των φασματικών τάξεων περίθλασης για μονοχρωματικό φως. Το Σχήμα 2β δείχνει το γωνιακό εύρος του φάσματος ορατού φωτός για ένα συγκεκριμένο φράγμα. Παρατηρούμε ότι υπάρχει μερική επικάλυψη μεταξύ του φάσματος 2ης και 3ης τάξης. Όταν ένα φάσμα είναι πολύπλοκο, η επικάλυψη μεταξύ των διαφορετικών τάξεων προκαλεί σημαντικά προβλήματα για την ερμηνεία του φάσματος. Για να αποφευχθεί αυτή η επιπλοκή, χρησιμοποιούνται ειδικά φίλτρα που αποκόπτουν π.χ. τα μικρότερα μήκη κύματος του προσπίπτοντος φωτός, έτσι ώστε να μην υπάρχει τελικά επικάλυψη.





**Σχήμα 2:** (α) Δημιουργία των τάξεων των κυρίων μεγίστων μονοχρωματικού φωτός που προσπίπτει κάθετα σε φράγμα G. (β) Γωνιακό εύρος των τριών πρώτων τάξεων του οπτικού φάσματος για φράγμα περίθλασης με 400 γραμμές ανά χιλιοστό. Οι διάφορες τάξεις απεικονίζονται σε διαφορετικές αποστάσεις από τον φακό για λόγους ευκρίνειας του σχήματος. Σε κάθε τάξη, το ερυθρό άκρο του φάσματος παρουσιάζει την μέγιστη απόκλιση. Υποθέτουμε ότι έχουμε κάθετη πρόσπτωση. Ο φακός χρησιμοποιείται για να εστιάζει τις διάφορες τάξεις στο πέτασμα.

### 2.3 Ελεύθερο φασματικό εύρος φράγματος

Η περιοχή μηκών κύματος σε μια συγκεκριμένη τάξη, που είναι ελεύθερη από επικαλύψεις από άλλες τάξεις, λέγεται **ελεύθερο φασματικό εύρος** (free spectral range), **F**.

Η επικάλυψη συμβαίνει διότι σύμφωνα με την εξίσωση φράγματος, ο όρος  $a(\sin \theta_i + \sin \theta_m)$  μπορεί να έχει την ίδια τιμή, για διάφορους κατάλληλους συνδυασμούς των  $m$  και  $\lambda$ . Έτσι, στη θέση όπου αντιστοιχεί φασματική γραμμή μήκους κύματος  $\lambda$ , σε πρώτη τάξη, μπορεί να αντιστοιχεί και φασματική γραμμή μήκους κύματος  $\lambda/2$  σε 2η τάξη, ή  $\lambda/3$  σε 3η τάξη κ.ο.κ. Το ελεύθερο φασματικό εύρος για τάξη  $m$  μπορεί να προσδιορισθεί με τον ακόλουθο τρόπο: Έστω  $\lambda_1$  το μικρότερο ανιχνεύσιμο μήκος κύματος στην προσπίπτουσα δέσμη. Το μεγαλύτερο μη επικαλυπτόμενο μήκος κύματος  $\lambda_2$  σε τάξη  $m$  συμπίπτει με την αρχή του φάσματος στην επόμενη (υψηλότερη) τάξη, δηλαδή

$$m\lambda_2 = (m+1)\lambda_1$$

Τότε, το free spectral range τάξης  $m$  δίνεται από τη σχέση:

$$F = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{\lambda_1}{m} \quad (3)$$

Παρατηρούμε ότι όσο μεγαλύτερη η τάξη τόσο μικρότερο το ελεύθερο φασματικό εύρος (free spectral range). [Το FSR έχει οριστεί με διαφορετικό σύμβολο στο πείραμα περίθλασης]

## 2.4 Διασπορά φράγματος

Όπως είναι γνωστό από το Πείραμα Περίθλασης, οι υψηλότερες τάξεις περίθλασης γίνονται προοδευτικά αμυδρότερες (αυξανόμενου του  $m$ ). Από την άλλη πλευρά, το σχήμα 2b εδώ, δείχνει ότι τα μήκη κύματος διαχωρίζονται καλύτερα μεταξύ τους, όσο μεγαλώνει η τάξη περίθλασης. Αυτή η ιδιότητα περιγράφεται ποσοτικά από την γωνιακή διασπορά  $\mathcal{D}$ , που ορίζεται ως

$$\mathcal{D} \equiv \frac{d\theta}{d\lambda_m} \quad (4)$$

Η μεταβολή της  $\theta_m$  συναρτήσει του  $\lambda$  δίνεται από την εξίσωση φράγματος (2), από την οποία προκύπτει ότι:

$$\mathcal{D} = \frac{m}{a \cos \theta_m} \quad (5)$$

Για κάθετη πρόσπτωση ( $\theta_i = 0$ ), η εξίσωση φράγματος μπορεί να ενσωματωθεί στην σχέση (5), οπότε προκύπτει ότι:

$$\mathcal{D} = \frac{m}{a \cos \theta} = \left( \frac{a \sin \theta}{\lambda} \right) \left( \frac{1}{a \cos \theta} \right) = \frac{\tan \theta}{\lambda} \quad (6)$$

όπου για ευκολία έχουμε θέσει  $\theta = \theta_m$

Έτσι η διασπορά είναι στην πραγματικότητα ανεξάρτητη της σταθεράς του φράγματος για μια δεδομένη γωνία περίθλασης και αυξάνει ταχύτατα αυξανόμενου του  $\theta$ .

Όπως φαίνεται από την εξίσωση (5) σε μια συγκεκριμένη γωνία περίθλασης, η αύξηση της σταθεράς του φράγματος έχει ως συνέπεια την αύξηση της τάξης περίθλασης.

## 2.5 Διακριτική ικανότητα φράγματος

Η μεγαλύτερη διασπορά δεν αρκεί από μόνη της για να διακρίνονται καλύτερα μεταξύ τους γειτονικά μήκη κύματος, εκτός αν οι ίδιες οι κορυφές έντασης είναι αρκετά αιχμηρές. Η τελευταία αυτή ιδιότητα περιγράφεται από την “διακριτική ικανότητα”.

Η διακριτική ικανότητα φράγματος είναι η ικανότητά του να παράγει διακεκριμένες κορυφές κοντινών μηκών κύματος σε μια συγκεκριμένη τάξη περίθλασης.

Γενικά, η διακριτική ικανότητα ορίζεται ως

$$R = \frac{\lambda}{(\Delta\lambda)_{\min}} \quad (7)$$

όπου  $(\Delta\lambda)_{\min}$  η ελάχιστη απόσταση μεταξύ δυο φασματικών συνιστωσών που μόλις διακρίνονται μεταξύ τους, σύμφωνα με το κριτήριο Rayleigh (Σχήμα 9, στο Πείραμα Περίθλασης).

Για κάθετη πρόσπτωση, και για το κύριο μέγιστο τάξης  $m$ , έχουμε σύμφωνα με την εξίσωση (2), ότι:

$$a \sin \theta = m(\lambda + d\lambda) \quad (8)$$

Για να ικανοποιείται το κριτήριο Rayleigh πρέπει αυτή η κορυφή να συμπίπτει (ίδια  $\theta$ ) με το πρώτο ελάχιστο της κορυφής του γειτονικού μήκους κύματος στην ίδια τάξη (όπως προκύπτει από το Σχήμα 14α και την εξίσωση (33), στο Πείραμα Περίθλασης), δηλ.

$$a \sin \theta = \left( m + \frac{1}{N} \right) \lambda \quad (9)$$

όπου  $N$  ο συνολικός αριθμός των χαραγών του φράγματος που φωτίζονται από την δέσμη με πάχος  $w$ , ώστε  $N = w/a$ .

Από τις (8) και (9) συμπεραίνουμε ότι  $\frac{\lambda}{d\lambda} = mN$ . Εφόσον, το  $d\lambda$  είναι η ελάχιστη διακριτή διαφορά μηκών κύματος, τότε η διακριτική ικανότητα του φράγματος είναι σύμφωνα με την Εξίσωση (7):

$$R = mN \quad (10)$$

Για ένα φράγμα με  $N$  χαραγές, η διακριτική ικανότητα είναι ανάλογη της τάξης περίθλασης. Για συγκεκριμένη τάξη περίθλασης, η διακριτική ικανότητα αυξάνει, αυξανόμενου του συνολικού αριθμού των χαραγών του φράγματος. Για να αυξηθεί το  $N$ , για δεδομένο πλάτος φράγματος  $w$ , οι χαραγές πρέπει να έχουν ανάλογα μικρότερη απόσταση μεταξύ τους. Για να εκμεταλλευτούμε τη μέγιστη διακριτική ικανότητα φράγματος, πρέπει η προσπίπτουσα δέσμη να καλύπτει πλήρως το (χαραγμένο) πλάτος του φράγματος.

Π.χ. ένα φράγμα με 5.000 χαραγές/cm και πλάτος 8 cm, φωτίζεται κάθετα με δέσμη με πάχος ( $\alpha$ )  $w=0.5$  cm και ( $\beta$ )  $w=8$  cm. Σε αυτές τις περιπτώσεις, έχουμε ( $\alpha$ )  $N=(5000\text{χαρ/cm})\times 0.5\text{cm} = 2500$  και η διακριτική του ικανότητα σε πρώτη τάξη ( $m=1$ ) είναι  $R=2500$ , και ( $\beta$ )  $N=(5000\text{χαρ/cm})\times 8\text{cm} = 40000$  και η διακριτική του ικανότητα σε πρώτη τάξη ( $m=1$ ) είναι  $R=40000$ . Δηλαδή, στην περίπτωση ( $\beta$ ), για  $\lambda=500\text{nm}$ , δύο φασματικές γραμμές που απέχουν μεταξύ τους μόλις 0,0125 nm είναι διακριτές (εξ. 7). Σε δεύτερη τάξη, η ποσότητα αυτή βελτιώνεται στα 0,0063 nm κ.ο.κ.

Οι καλύτερες τιμές διακριτικής ικανότητας φράγματος είναι μεταξύ  $10^5$  και  $10^6$ . Για παράδειγμα, ένα φράγμα με 1000 χαραγές/cm και πλάτος 20 cm έχει διακριτική ικανότητα 1 εκατομμύριο σε 5η τάξη. Για κάθετη πρόσπτωση, η εξίσωση φράγματος καθορίζει ότι το μέγιστο περιθλώμενο μήκος κύματος υπ' αυτές τις συνθήκες είναι μόλις 200 nm. Για μη κάθετη πρόσπτωση, το μέγιστο περιθλώμενο μήκος κύματος μπορεί να αυξηθεί. Π.χ. για  $\theta_i = 90$  μοίρες, το μέγιστο περιθλώμενο μήκος κύματος γίνεται  $400 \square \text{nm}$ .

Επιπλέον, σε μεγάλες τάξεις περίθλασης έχουμε μικρές εντάσεις, γεγονός που περιορίζει σημαντικά την δυνατότητα λειτουργίας στις τάξεις αυτές (εκτός εάν χρησιμοποιηθεί η τεχνική του blazing).

Η διακριτική ικανότητα, όπως και η διασπορά είναι ανεξάρτητη της απόστασης μεταξύ διαδοχικών χαραγών για συγκεκριμένη γωνία περίθλασης. Γράφοντας,  $N=w/a$ , και χρησιμοποιώντας την εξίσωση φράγματος (για κάθετη πρόσπτωση) παίρνουμε από την (10)

$$R = mN = \left( \frac{a \sin \theta_m}{\lambda} \right) \frac{w}{a} \Rightarrow R = \frac{w \sin \theta_m}{\lambda} \quad (11)$$

Σύμφωνα με την εξίσωση (11), η διακριτική ικανότητα φράγματος για γωνία περίθλασης  $\theta_m$  εξαρτάται από το πλάτος του φράγματος και όχι από τον αριθμό των χαραγών του. Αλλά, για συγκεκριμένο λόγο  $\sin(\theta_m)/\lambda$ , η εξίσωση φράγματος καθορίζει και τον λόγο  $m/a$ . Έτσι, αν χρησιμοποιήσουμε ένα φράγμα με λιγότερες χαραγές, και άρα μεγαλύτερη σταθερά φράγματος, πρέπει να εργασθούμε σε ψηλότερη τάξη, με όλες τις επιπλοκές που προαναφέρθηκαν.

### 3. Περιγραφή της πειραματικής διάταξης

Για την μελέτη του φράγματος χρησιμοποιούμε γωνιόμετρο ακριβείας (HARRIS) , λάμπα υδραργύρου, και οπτικό φράγμα 600 χαραγών/mm.

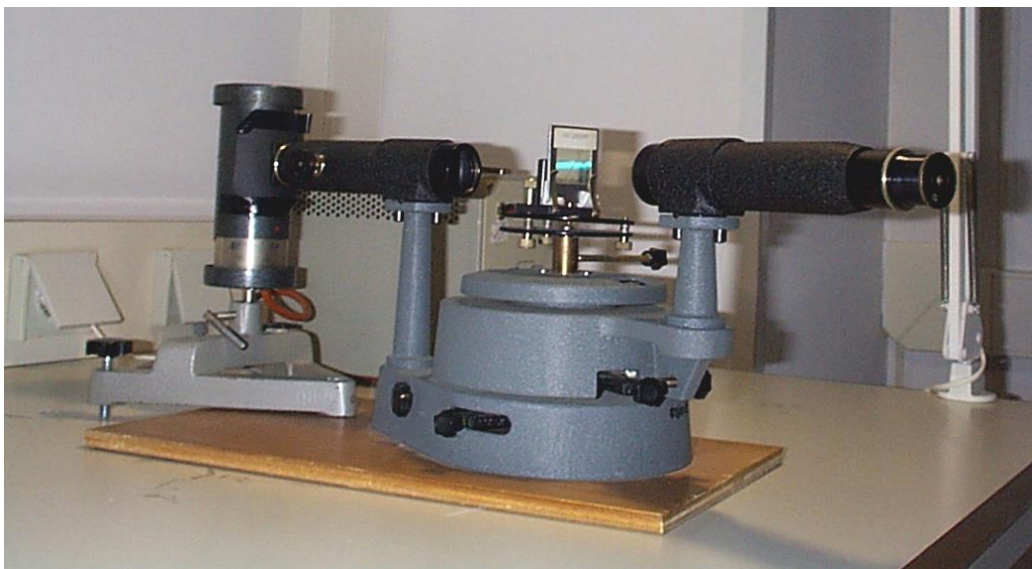
Η πειραματική διάταξη φαίνεται στο Σχήμα 3.

Το γωνιόμετρο αποτελείται από τα εξής τμήματα:

- τον κατευθυντήρα
- την διόπτρα
- τον δίσκο όπου τοποθετείται το φράγμα που μελετάται κάθε φορά

Για να μετρηθούν με ακρίβεια οι διάφορες γωνίες πρέπει απαραίτητως η φωτεινή πηγή να παράγει δέσμη όσο γίνεται λιγότερο αποκλίνουσα. Με την σωστή ρύθμιση του φακού του κατευθυντήρα είναι δυνατόν η δέσμη που εξέρχεται να είναι παράλληλη. Από την θεωρία της οπτικής, η διόπτρα οφείλει να είναι ρυθμισμένη στο άπειρο προκειμένου το είδωλο να είναι ευκρινές (βλ. Πείραμα μελέτης πρίσματος).

Ο δίσκος περιστρέφεται γύρω από τον κατακόρυφο άξονα. Το γωνιόμετρο που πρόκειται να χρησιμοποιήσετε επιτρέπει την μέτρηση γωνιών με ακρίβεια της τάξης του λεπτού της μοίρας. Ωστόσο, αυτό επιτυγχάνεται μετά από προσεκτικές και διαδοχικές μηχανικές και οπτικές ρυθμίσεις.



**Σχήμα 3:** Πειραματική διάταξη αποτελούμενη από το γωνιόμετρο με την περιστρεφόμενη τράπεζα, όπου τοποθετείται το φράγμα, την διόπτρα τον κατευθυντήρα, και την λάμπα (εδώ υδραργύρου) με το αντίστοιχο τροφοδοτικό.

### 4. Εκτέλεση του πειράματος

#### 4.1 Ρύθμιση του οργάνου

##### *Μηχανικές ρυθμίσεις*

Το επίπεδο του δίσκου στο γωνιόμετρο πρέπει να είναι παράλληλο προς το επίπεδο που ορίζουν οι άξονες του κατευθυντήρα και της διόπτρας.

Παρατηρήστε ότι ο άξονας περιστροφής του δίσκου είναι κάθετος προς το βάθρο του οργάνου. Αυτό σημαίνει ότι ρυθμίζοντας κατάλληλα τους τρεις κοχλίες που συνδέουν το δίσκο με τον άξονα θα επιτύχετε και την ζητούμενη παραλληλία.

##### *Οπτικές ρυθμίσεις*

Τοποθετήστε την λάμπα υδραργύρου στην οπτική τράπεζα και τροφοδοτήστε την.

Ρυθμίστε με τον κοχλία την διόπτρα στο άπειρο (σ' αυτή τη θέση λαμβάνει καθαρό είδωλο ενός αντικειμένου που φωτίζεται από παράλληλη δέσμη φωτός). Βεβαιωθείτε ότι βλέπετε το σταυρόνημα ευκρινώς (σε αυτή τη ρύθμιση το σταυρόνημα που παρατηρείτε βρίσκεται στην εστία του αντικειμενικού φακού).

## 4.2 Μελέτη οπτικού φράγματος

### 4.2.1 Το φάσμα της λάμπας υδραργύρου

#### Πειραματική Διαδικασία:

- Παρατηρήστε το φάσμα και αναγνωρίστε τις κύριες γραμμές χρησιμοποιώντας το φράγμα των 600 γραμμών ανά mm.
- Οι πιο έντονες γραμμές μπορούν να παρατηρηθούν με συνήθη φωτισμό περιβάλλοντος και με μικρό εύρος σχισμής εισόδου. Παρατηρήστε τις γραμμές:

Ιώδης	404.7 nm
Κυανή	435.8 nm
Πράσινη	546.1 nm
Διπλή Κίτρινη	{ 577.0 nm 579.0 nm

- Για να μπορέσετε να παρατηρήσετε τις λιγότερο έντονες γραμμές ελαττώστε τον εξωτερικό φωτισμό και αυξήστε το πλάτος της σχισμής. Παρατηρήστε τις γραμμές:

Δεύτερη ιώδης γραμμή	407.8 nm
Μία γαλάζια-πράσινη	491.6 nm
Δεύτερη πράσινη γραμμή	535.4 nm
Δύο επιπλέον κίτρινες γραμμές	567.5 και 580.3 nm
Μία πορτοκαλί γραμμή	587.9 nm
Τρεις κόκκινες γραμμές	607.3, 612.3 και 623.4 nm

### 4.2.2. Κάθετη πρόσπτωση

#### Πειραματική Διαδικασία:

- Τοποθετήστε την διόπτρα απέναντι από σχισμή πολύ μικρού εύρους και ρυθμίστε την θέση της ώστε το είδωλό της να συμπέσει με το κέντρο του σταυρονήματος
- Ακινητοποιήστε την διόπτρα έτσι, ώστε ο άξονας της να συμπίπτει με εκείνον του κατευθυντήρα
- Τοποθετήστε στο κέντρο της τράπεζας το φράγμα των 600 γραμμών ανά mm, κάθετα στον άξονα διόπτρας-κατευθυντήρα.
- Επισημάνετε περιστρέφοντας την διόπτρα και καταγράψτε τις θέσεις των κυριότερων γραμμών του φάσματος της λάμπας υδραργύρου, σε πρώτη και δεύτερη τάξη.

#### Ζητούμενα:

- Χαράξτε την καμπύλη  $\sin(\theta)=f(\lambda)$  και επαληθεύστε τον θεμελιώδη νόμο του φράγματος.
- Από την καμπύλη αυτή βρείτε μία τιμή για τις γραμμές ανά mm (1/a), και συγκρίνετε με την γνωστή τιμή 600 γραμμών ανά mm. Εκτιμήστε την ακρίβεια του αποτελέσματος.

### 4.2.3. Μεταβλητή πρόσπτωση

#### Πειραματική Διαδικασία:

- Στο γωνιόμετρο δεν προβλέπεται ειδική διάταξη για την άμεση μέτρηση της γωνίας πρόσπτωσης της φωτεινής δέσμης πάνω στο φράγμα. Μπορεί να ρυθμιστεί η γωνία πρόσπτωσης στην επιθυμητή τιμή με τη βοήθεια κατόπτρου (τον ρόλο αυτό παίζει το ίδιο το φράγμα) και την κλίμακα που χρησιμεύει για τον προσδιορισμό της θέσης της διόπτρας. Η διαδικασία είναι:

- Στερεώνετε τη δίοπτρα σε θέση που να σχηματίζει την γωνία  $i$  με την διεύθυνση της φωτεινής δέσμης
  - Τοποθετείτε το φράγμα στην τράπεζα περίπου κάθετα στον άξονα της δίοπτρας και περιστρέφετε ελαφρά την τράπεζα ώστε το είδωλο του σταυρονήματος, που προέρχεται από ανάκλαση πάνω στο φράγμα, συμπίπτει με το σταυρόνημα
- Ακινήτοποιήστε την τράπεζα στη θέση αυτή. Το φράγμα σχηματίζει πλέον γωνία  $i$  με την φωτεινή δέσμη

#### Ζητούμενα:

- Επαληθεύστε ότι το άθροισμα  $\sin i \pm \sin \theta$  παραμένει σταθερό για δεδομένο μήκος κύματος  $\lambda$ .
- Προσδιορίστε την τιμή  $(1/a)$  και εκτιμήστε την ακρίβεια του αποτελέσματος.

#### 4.2.4. Χρησιμοποίηση της ελάχιστης απόκλισης

Όπως στην περίπτωση του πρίσματος, μπορούμε να μελετήσουμε την γωνία ελάχιστης απόκλισης μεταξύ της προσπίπτουσας και περιθλώμενης ακτίνας. Μπορείτε να αποδείξετε εύκολα (**άσκηση**) ότι ελάχιστη απόκλιση έχουμε όταν η γωνία πρόσπτωσης ισούται με την γωνία ανάδυσσης, και ότι:

$$2 \sin\left(\frac{\delta_m}{2}\right) = \frac{m\lambda}{a} \quad (12).$$

#### Πειραματική Διαδικασία:

- Ο προσδιορισμός της ελάχιστης απόκλισης μίας δοσμένης φασματικής γραμμής μπορεί να γίνει για δύο συμμετρικές θέσεις του φράγματος προς τον άξονα του κατευθυντήρα. Η γωνία των δύο αντιστοίχων θέσεων της δίοπτρας είναι ίση με  $2\delta_m$ .
- Μετρήστε τη γωνία ελάχιστης απόκλισης για την ιώδη και πράσινη γραμμή για το φάσμα 1ης και 2ης τάξης.
- Περιστρέφοντας την τράπεζα βρείτε την θέση ελάχιστης απόκλισης για την γραμμή που μελετάτε, όπως και στο πείραμα του πρίσματος.
- Έστω  $Y$  η θέση που αντιστοιχεί στην δίοπτρα. Προσδιορίστε την συμμετρική θέση του φράγματος ως προς τον άξονα του κατευθυντήρα. Ορίστε  $Y'$  τη νέα θέση της δίοπτρας. Τότε θα ισχύει ότι

$$\delta_m = \frac{Y' - Y}{2}.$$

#### Ζητούμενα:

- Χρησιμοποιήστε τις προηγούμενες μετρήσεις για τον προσδιορισμό του  $N$ ., αφού πρώτα αποδείξετε ότι για μικρές γωνίες ισχύει η σχέση (12).
- Εκτιμήστε την ακρίβεια του υπολογισμού σας.

#### Ερωτήσεις

1. Έστω φως 500nm που προσπίπτει κάθετα στο φράγμα σας (που έχει 600 χαραγές/mm). Ποια η γωνιακή διασπορά σε πρώτη τάξη;
2. Εάν το μικρότερο ανιχνεύσιμο μήκος κύματος που εκπέμπεται από την λάμπα υδραργύρου είναι 404.7nm, βρείτε το ελεύθερο φασματικό εύρος (free spectral range) για τις τρεις πρώτες τάξεις περίθλασης για το φράγμα που χρησιμοποιήσατε.
3. Ποια είναι η διακριτική ικανότητα του φράγματος που χρησιμοποιήσατε, σε 1η και 2η τάξη;
4. Υπολογίστε το γωνιακό πλάτος της πράσινης γραμμής των 546.1nm, λόγω διαπλάτυνσης του οργάνου (instrumental broadening).
5. Υπολογίστε την σχετική ένταση της πράσινης γραμμής των 546.1nm στο φάσμα πρώτης, δεύτερης και τρίτης τάξης.
6. Συγκρίνετε την εξάρτηση της γωνίας απόκλισης από το μήκος κύματος, στην περίπτωση που το στοιχείο διασποράς είναι φράγμα περίθλασης και στην περίπτωση που είναι πρίσμα.

#### Βιβλιογραφία

- R.A. Serway, Physics for scientists and engineers, Τόμος ΙΙΙ, παράγραφοι 38.4
- F.L. Pedrotti & L.S. Pedrotti, Introduction to Optics, Prentice Hall International Editions, 1993, ch. 17
- E. Hecht, Optics, Addison-Wesley Publishing Company, 1987, ch. 10.27



## 8. ΜΕΛΕΤΗ ΑΤΟΜΙΚΩΝ ΦΑΣΜΑΤΩΝ ΕΚΠΟΜΠΗΣ

### 1. Σκοπός

Στο πείραμα αυτό θα μελετήσουμε ατομικά φάσματα εκπομπής προερχόμενα από διάφορα στοιχεία (Hg, Na, Th). Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε ειδικές λάμπες που εμπεριέχουν τα αντίστοιχα στοιχεία, και έναν φασματογράφο οπτικής ίνας. Σκοπός του πειράματος είναι:

- Η εξοικείωση με σύγχρονες φασματοσκοπικές τεχνικές
- Εισαγωγή στις φυσικές διεργασίες που καθορίζουν τα χαρακτηριστικά των παρατηρούμενων φασμάτων εκπομπής

### 2. Θεωρία

#### Βασική προαπαιτούμενη γνώση

A. Serway, Physics for Scientists & Engineers, Τόμος IV, Σύγχρονη Φυσική, Κεφ. 40 & 42 (συμπεριλαμβανομένων των αντίστοιχων παραδειγμάτων και προβλημάτων).

B. Serway, Physics for Scientists & Engineers, Τόμος III, Κεφ.35.7 (ολική ανάκλαση, οπτικές ίνες)

Γ. Serway, Moses & Moyer, Σύγχρονη Φυσική, ΠΕΚ, Κεφ. 2, σελ. 47-63.

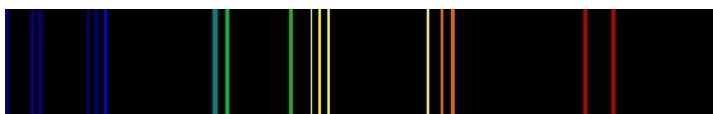
#### 2.1 Εισαγωγικά

Η φασματοσκοπία τόσο ως θεωρητικό όσο και ως πειραματικό επιστημονικό πεδίο έχει συμβάλει πολύ σημαντικά στην κατανόηση της φύσης και στην θεμελίωση της κβαντομηχανικής. Έχει σημαντικές εφαρμογές σε πολλές επιστήμες (χημεία, βιολογία, ιατρική, αστρονομία, αλλά και στην βιομηχανία ως διαγνωστικό μέσο).

Το σύνολο των συχνοτήτων της ακτινοβολίας που εκπέμπει μία φωτεινή πηγή ονομάζεται **φάσμα** της πηγής αυτής.

Τα φάσματα εκπομπής των διαφόρων φωτεινών πηγών διακρίνονται σε συνεχή φάσματα και σε γραμμικά φάσματα.

Τα **γραμμικά φάσματα εκπομπής**, αποτελούνται από διακριτές έγχρωμες γραμμές, όπως φαίνεται στο παράδειγμα του σχήματος 1, και προέρχονται από την διέγερση αερίου ή ατμού. Τα γραμμικά φάσματα είναι χαρακτηριστικά του εκπέμποντος αερίου ή ατμού.



**Σχήμα 1:** Γραμμικό φάσμα εκπομπής. Το μήκος κύματος αυξάνεται και τα τη διεύθυνση του οριζόντιου άξονα.

Τα **συνεχή φάσματα εκπομπής**, όπως αυτό του σχήματος 2, εκπέμπονται από στερεά ή υγρά σώματα που βρίσκονται σε υψηλή θερμοκρασία (π.χ. λαμπτήρας πυρακτώσεως, βολταϊκό τόξο). Η κατανομή ενέργειας στις διάφορες περιοχές (μήκη κύματος) του συνεχούς φάσματος δίνεται από τον τύπο μέλανος σώματος του Planck και εξαρτάται από την θερμοκρασία του ακτινοβολούντος σώματος, και όχι από την χημική του σύσταση.



**Σχήμα 2:** Συνεχές φάσμα εκπομπής. Το μήκος κύματος αυξάνεται και τα τη διεύθυνση του οριζόντιου άξονα.

Όταν η θερμοκρασία είναι σχετικά χαμηλή (π.χ. ερυθροπωμένοι άνθρακες), το σώμα εκπέμπει κυρίως ερυθρή ακτινοβολία, ενώ για ακόμη χαμηλότερες θερμοκρασίες (π.χ. θερμοκρασία ανθρώπινου σώματος), εκπέμπεται υπέρυθη ακτινοβολία (βλ. συστήματα ασφαλείας με ανιχνευτές υπέρυθρης ακτινοβολίας).

## 2.2 Ατομικά (γραμμικά) φάσματα εκπομπής

Από την κβαντική θεωρία του ατόμου είναι γνωστό ότι τα άτομα έχουν συγκεκριμένες ενεργειακές στάθμες και ότι τα ηλεκτρόνια του ατόμου πληρούν τις κατώτερες ενεργειακές στάθμες με καθορισμένο τρόπο. Η ενεργειακή κατάσταση που καταλαμβάνεται από το ή τα ηλεκτρόνια της εξωτερικής στιβάδας είναι η κατάσταση ισορροπίας, ή, όπως λέμε στη γλώσσα των μεταπτώσεων, η χαμηλότερη ενεργειακά κατάσταση,  $I$  (lower energy level). Όπως έχει αποδειχθεί πειραματικά, είναι δυνατόν ένα ηλεκτρόνιο να διεγερθεί από την κατάσταση  $I$  σε μια άλλη ανώτερη  $u$  (upper). Η διέγερση αυτή μπορεί να γίνει με την απορρόφηση ενός φωτονίου, ή λόγω κρούσης με ένα άλλο ελεύθερα κινούμενο ηλεκτρόνιο, ή και με άλλους τρόπους.

Μετά την διέγερση, το άτομο μπορεί να επανέλθει στη βασική του χαμηλότερη ενεργειακά κατάσταση, με την εκπομπή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας (φωτονίου), με ενέργεια

$$\Delta E_{ul} = h\nu_{ul} = E_u - E_l \quad (0)$$

όπου  $E_u$  και  $E_l$  είναι οι ενέργειες των επιπέδων που συμμετέχουν στην μετάπτωση.

Προφανώς, υπάρχουν πολλές δυνατές μεταβάσεις αυτού του είδους. Το σύνολο των συχνοτήτων (ή, ισοδύναμα, των μηκών κύματος) που εκπέμπονται από τα άτομα ενός στοιχείου αποτελεί το φάσμα εκπομπής του. Το φάσμα εκπομπής μπορεί να μελετηθεί με τη παρεμβολή ενός στοιχείου διασποράς, π.χ. πρίσματος ή φράγματος, που έχουν ήδη μελετηθεί σε προηγούμενες ασκήσεις.

Στις επόμενες παραγράφους θα περιγραφεί η διαδικασία εκπομπής ακτινοβολίας από ένα διεγερμένο άτομο, και θα αναλυθούν οι παράγοντες που καθορίζουν τελικά την κατανομή της εκπεμπόμενης έντασης της ακτινοβολίας συναρτήσει της συχνότητας, εκατέρωθεν της «κεντρικής» συχνότητας που προκύπτει από την σχέση (0).

### *Αποδιέγερση ενός μεμονωμένου ατόμου με εκπομπή ακτινοβολίας – αυθόρμητη εκπομπή*

Ας θεωρήσουμε ότι ένα σύνολο ταυτόσημων ατόμων που αρχικά βρισκόταν στη βασική κατάσταση, διεγείρονται και μεταφέρονται γρήγορα στο επίπεδο  $u$ . Έστω ότι ο αριθμός ατόμων ανά μονάδα όγκου που βρίσκονται στην κατάσταση  $u$  είναι  $N_u$ . Πειραματικά έχει βρεθεί ότι η παραγόμενη ακτινοβολία από την μετάβαση  $u$  στην  $I$ , και επομένως και ο πληθυσμός  $N_u$ , αποσβένονται εκθετικά συναρτήσει του χρόνου (για την περίπτωση ενός μόνο κατώτερου επιπέδου  $I$ ). Το Σχήμα 3α δείχνει την μεταβολή του  $N_u$  συναρτήσει του χρόνου, που χαρακτηρίζεται από ένα ενεργό χρόνο απόσβεσης  $\tau_u$ . Το Σχήμα 3β δείχνει τα συμμετέχοντα ενεργειακά επίπεδα του ατόμου και τη χαρακτηριστική πιθανότητα της μετάπτωσης  $A_{ul}$ .

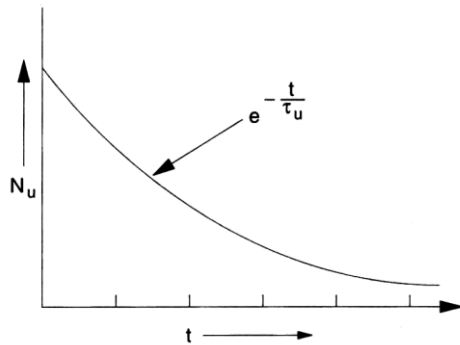
Όταν η πυκνότητα των ατόμων είναι χαμηλή και δεν έχουμε κρούσεις μεταξύ των ατόμων κατά τη διάρκεια της εκπομπής (της τάξης των μερικών  $\tau_u$ ), η εν λόγω εκπομπή ονομάζεται "αυθόρμητη εκπομπή" και η εκπεμπόμενη ενέργεια είναι  $\Delta E_{ul} = E_u - E_l$ .

Μπορούμε να γράψουμε μια απλή εξίσωση για την χρονική μεταβολή του  $N_u$ :

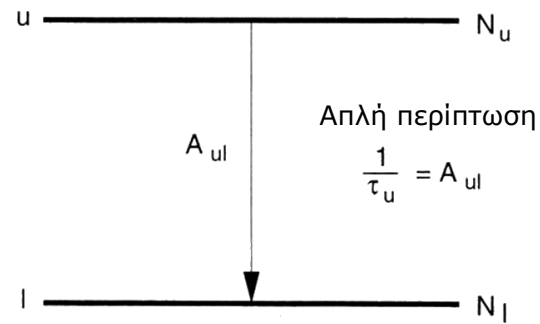
$$\frac{dN_u}{dt} = -A_{ul} N_u \quad (1)$$

όπου  $A_{ul}$  είναι ο λεγόμενος ρυθμός της μετάπτωσης (radiative transition rate), ή πιθανότητα της μετάπτωσης, ή πιθανότητα αυθόρμητης εκπομπής. Η ακριβής τιμή του  $A_{ul}$  για κάθε μετάπτωση μπορεί να υπολογισθεί κβαντομηχανικά.





**Σχήμα 3α.** Μεταβολή του πληθυσμού  $N_u$  της κατάστασης  $u$  ως συνάρτηση του χρόνου  $t$ .



**Σχήμα 3β.** Μετάπτωση ηλεκτρονίου από κατάσταση  $u$  σε  $l$  με εκπομπή ακτινοβολίας με πιθανότητα  $A_{ul}$ .

Η λύση της εξίσωσης αυτής είναι η

$$N_u = N_u^0 e^{-A_{ul}t} \quad (2)$$

όπου  $N_u^0$  είναι η πυκνότητα πληθυσμού αρχικά (μόλις τελείωσε η διέγερση). Μπορούμε να ορίσουμε ένα χρόνο  $\tau_u$  σύμφωνα με τη σχέση

$$N_u = N_u^0 e^{-t/\tau_u} \quad (3)$$

όπου το  $\tau_u = 1/A_{ul}$  ονομάζεται "χρόνος ζωής" της κατάστασης  $u$ . Για την περίπτωση που το επίπεδο  $u$  αποδιεγείρεται σε περισσότερα επίπεδα ( $i, j, k, \dots$ ) μπορούμε να γενικεύσουμε την (1), οπότε έχουμε την

$$\frac{dN_u}{dt} = -(A_{ui} + A_{uj} + A_{uk} + \dots)N_u = -\left(\sum_i A_{ui}\right)N_u \quad (4)$$

η οποία έχει τη λύση

$$N_u = N_u^0 \exp\left\{-\left(\sum_i A_{ui}\right)t\right\} \quad (5)$$

Συγκρίνοντας τις (3) και (5) προκύπτει ότι

$$\tau_u = \frac{1}{\sum_i A_{ui}} \quad (6)$$

Η (6) δηλώνει ότι ο χρόνος ζωής της κατάστασης  $u$  καθορίζεται πλήρως από τους ρυθμούς αποδιέγερσης  $A_{ui}$  σε όλα τα κατώτερα επίπεδα.

Το αντίστροφο του χρόνου ζωής ονομάζεται **σταθερά αποδιέγερσης λόγω εκπομπής**, και δίνεται από την

$$\gamma_u^{rad} = \frac{1}{\tau_u} = \sum_i A_{ui} \quad (7)$$

οπότε η (5) γίνεται

$$N_u = N_u^0 e^{-\gamma_u t} \quad (8)$$

### Μεταπτώσεις λόγω κρούσεων

Τα παραπάνω ισχύουν για άτομα που μπορούν να θεωρηθούν απομονωμένα. Αυτό όμως σπάνια συμβαίνει στην πράξη και σε πολλές περιπτώσεις τα διεγερμένα άτομα συγκρούονται με άλλα γειτονικά. Το αποτέλεσμα είναι να αποδιεγείρονται χωρίς εκπομπή ακτινοβολίας μεταφέροντας την ενέργεια στο άτομο

με το οποίο ήλθαν σε σύγκρουση. Κατ' αυτό τον τρόπο ελαττώνεται ο πληθυσμός  $N_u$ , χωρίς την εκπομπή φωτονίων, δηλ. ελαττώνεται ο χρόνος ζωής της κατάστασης  $u$ , ή ισοδύναμα αυξάνεται το  $\gamma_u$ , κατά  $\gamma_u^{\text{coll}}$ , που ονομάζεται **σταθερά αποδιέγερσης λόγω κρούσεων**. Άρα, συνολικά η σταθερά αποδιέγερσης γίνεται

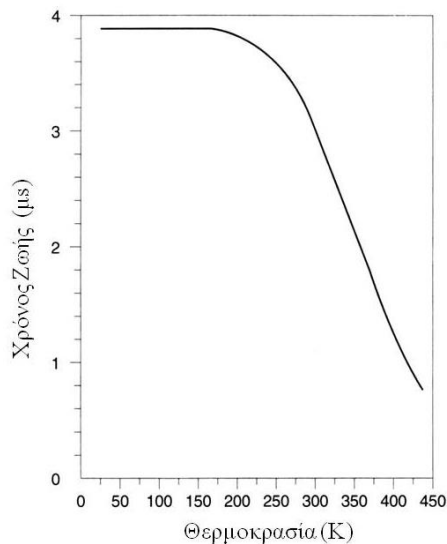
$$\gamma_u = \gamma_u^{\text{rad}} + \gamma_u^{\text{coll}} \quad (9)$$

και ο χρόνος ζωής παίρνει την μορφή

$$\tau_u = \frac{1}{\gamma_u} = \frac{1}{\gamma_u^{\text{rad}} + \gamma_u^{\text{coll}}} \quad (10)$$

Μεταπτώσεις λόγω κρούσεων συμβαίνουν σε όλων των ειδών τα υλικά. Στα αέρια τα άτομα βρίσκονται σε συνεχή κίνηση και συγκρούονται μεταξύ τους, στα υγρά τα διεγερμένα άτομα συγκρούονται με τα άλλα άτομα του περιβάλλοντος και στα στερεά έχουμε κρούσεις με κύματα τα οποία ονομάζονται φωνόνια και τα οποία αναφέρονται σε συντονισμένες μετατοπίσεις του πλέγματος (lattice vibrations).

Προφανώς, όσο αυξάνεται η θερμοκρασία, αυξάνονται και οι συγκρούσεις, άρα περιμένουμε να ελαττώνεται ο χρόνος ζωής μιάς διεγερμένης κατάστασης, όπως φαίνεται στο σχήμα 4. Το σχήμα αυτό δείχνει τη μεταβολή χρόνου ζωής της διεγερμένης κατάστασης για μια μετάπτωση laser σε ένα υλικό που αποτελείται από άτομα τιτανίου τοποθετημένα σε μια κρυσταλλική δομή ζαφειριού (sapphire,  $Al_2O_3$ ). Όταν αυξηθεί η θερμοκρασία, οι ταλαντώσεις του πλέγματος αυξάνονται και οι κρούσεις με τα αντίστοιχα φωτόνια των διεγερμένων ατόμων του τιτανίου προκαλούν αποδιεγέρσεις χωρίς εκπομπή φωτονίου, ελαττώνοντας το χρόνο ζωής από τα  $3.9\mu\text{s}$  που είναι σε χαμηλές θερμοκρασίες στα  $3.0\mu\text{s}$  για θερμοκρασία δωματίου.



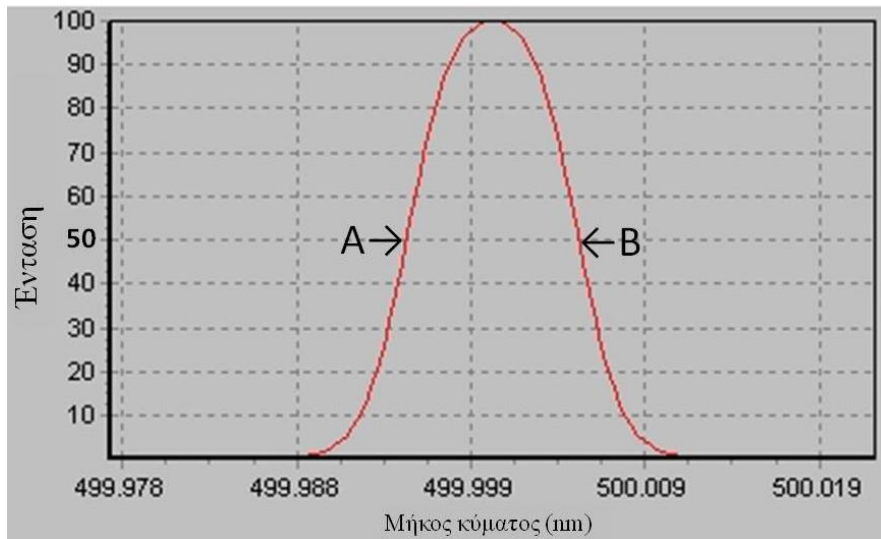
**Σχήμα 4.** Ο χρόνος ζωής για το άνω επίπεδο της μετάπτωσης στο *laser Ti:Sapphire* ως συνάρτηση της θερμοκρασίας.

### 2.3 Το εύρος μιας φασματικής γραμμής

Όταν εξετάζουμε μια φασματική γραμμή με ένα φασματογράφο, παρατηρούμε ότι εμφανίζεται ένα πεπερασμένο εύρος, που εξαρτάται από το πλάτος της σχισμής που χρησιμοποιήσαμε (ή από την σταθερά του φράγματος, εαν ο φασματογράφος χρησιμοποιεί φράγμα περίθλασης ως στοιχείο διασποράς). Στο Σχήμα 5 φαίνεται η κατανομή έντασης συναρτήσει του μήκους κύματος για μία φασματική γραμμή κεντρικού μήκους κύματος  $500\text{nm}$ . Το εύρος της γραμμής ορίζεται ως η απόσταση (εδώ σε  $\text{nm}^{11}$ ) μεταξύ δύο σημείων A και B (βλ. σχήμα) των οποίων οι εντάσεις

<sup>11</sup> Αλλά μπορεί να είναι σε Hz, ή και σε  $\text{cm}^{-1}$

αντιστοιχούν στο μισό της μέγιστης έντασης. Εν γένει το εύρος μιας φασματικής γραμμής είναι ανάλογο του πλάτους της σχισμής του φασματογράφου (ή αντιστρόφως ανάλογο της σταθεράς  $N$  του φράγματος περίθλασης, στην περίπτωση που το στοιχείο διασποράς του φασματογράφου είναι φράγμα). Όμως, όσο και αν ελαττώσουμε το πλάτος της σχισμής, και ακόμα και με το τελειότερο οπτικό σύστημα, το εύρος της φασματικής γραμμής δεν ελαττώνεται πέρα από μια ελάχιστη τιμή. Τρεις είναι οι βασικοί παράγοντες που συμβάλλουν στον καθορισμό του ελάχιστου εύρους μιας φασματικής γραμμής: α) η αρχή της απροσδιοριστίας που προσδίδει σε μια γραμμή το «φυσικό πλάτος» της (φυσική διαπλάτυνση), β) το φαινόμενο Doppler, γ) οι κρούσεις μεταξύ ατόμων και δ) η παρουσία διαφόρων ισοτόπων του ίδιου στοιχείου.



Σχήμα 5: Κατανομή έντασης συναρτήσει μήκους κύματος μιας φασματικής γραμμής

**(α) Φυσική διαπλάτυνση  $\Delta\nu_N$  μιας φασματικής γραμμής**

Σύμφωνα με την αρχή της απροσδιοριστίας (ή της αβεβαιότητας), η αβεβαιότητα στη μέτρηση της ενέργειας,  $\Delta E$ , συνδέεται με την αβεβαιότητα στη μέτρηση του χρόνου,  $\Delta t$ , μέσω της σχέσης

$$\Delta E \cdot \Delta t \approx \hbar = h / 2\pi \quad (11)$$

Θεωρώντας ότι η αβεβαιότητα  $\Delta t$  ισούται με τον χρόνο ζωής της κατάστασης,  $\tau_u$ , για την κατάσταση  $u$ , τότε η  $\Delta E_u$  έχει μια ελάχιστη τιμή:

$$\Delta E_u = \frac{\hbar}{\tau_u} = \hbar \sum_i A_{ui} \quad (12)$$

Τα ίδια ισχύουν για την κατάσταση  $l$  οπότε:

$$\Delta E_l = \frac{\hbar}{\tau_l} = \hbar \sum_j A_{lj} \quad (13)$$

με αποτέλεσμα το ολικό ενεργειακό εύρος των δύο καταστάσεων να είναι

$$\Delta E_T = \Delta E_u + \Delta E_l = \hbar \left( \sum_i A_{ui} + \sum_j A_{lj} \right) \quad (14)$$

Μπορούμε, τώρα, να συνδέσουμε το  $\Delta E_T$  με το εύρος συχνοτήτων της μετάπτωσης  $u \rightarrow l$  (βλέπε Σχήμα 6),  $\Delta\nu_{ul}$ , ως εξής:

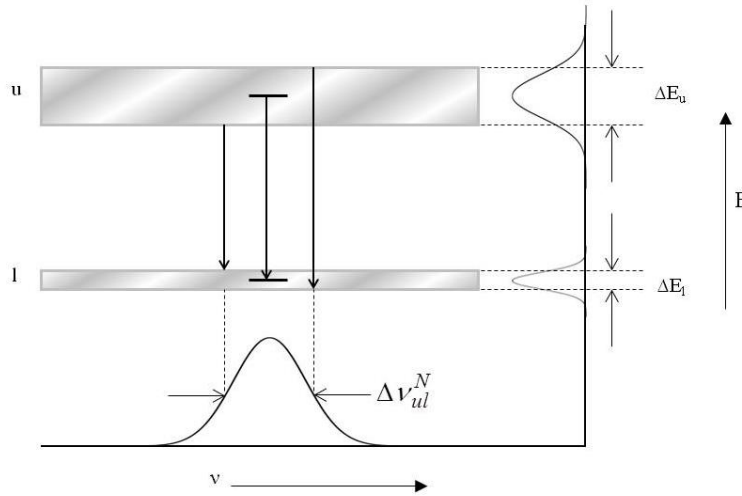
$$\Delta E_T = h \Delta\nu_{ul} \quad (15)$$

Εξισώνοντας τις (10) και (11) προκύπτει η σχέση

$$\hbar \left( \sum_i A_{ui} + \sum_j A_{ij} \right) = h \Delta \nu_{ul} \quad (16)$$

οπότε,

$$\Delta \nu_{ul}^N = \frac{\sum_i A_{ui} + \sum_j A_{ij}}{2\pi} \quad (17)$$



**Σχήμα 6:** Φυσική διαπλάτωση φασματικής γραμμής που προκύπτει από την μετάπτωση  $u \rightarrow l$

**(β) Διαπλάτωση λόγω φαινομένου Doppler**

Σύμφωνα με το φαινόμενο Doppler, όταν υπάρχει σχετική κίνηση μεταξύ της πηγής, που εκπέμπει ένα ημιτονοειδές κύμα συχνότητας  $\nu_0$ , και του παρατηρητή, τότε η συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής διαφοροποιείται από την  $\nu_0$ . Όταν η πηγή κινείται προς τον παρατηρητή με ταχύτητα  $v$ , τότε ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται περισσότερα μέτωπα κύματος ανά μονάδα χρόνου, δηλαδή περισσότερες εναλλαγές του πεδίου, με άλλα λόγια μεγαλύτερη συχνότητα, που δίνεται από τη σχέση (για  $v/c \ll 1$ , όπου  $c$  η ταχύτητα του φωτός)

$$\nu = \left( 1 + \frac{v}{c} \right) \nu_0 \quad (18)$$

ενώ όταν η πηγή απομακρύνεται από τον παρατηρητή,

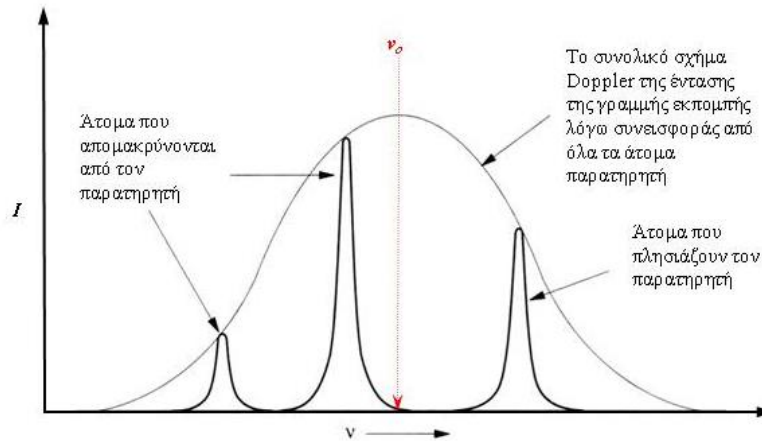
$$\nu = \left( 1 - \frac{v}{c} \right) \nu_0 \quad (19)$$

Αν όλα τα άτομα ενός δεδομένου αερίου είχαν περίπου την ίδια ταχύτητα λόγω της συνολικής κίνησης του αερίου (όπως π.χ. μπορεί να συμβαίνει στην ατμόσφαιρα ενός άστρου), τότε το εύρος της φασματικής γραμμής δεν θα άλλαζε, αλλά θα μετατοπιζόταν ολόκληρη η γραμμή σε μικρότερη ή μεγαλύτερη συχνότητα, ανάλογα με την κατεύθυνση της κίνησης. Όταν όμως το κέντρο μάζας του συστήματος είναι ακίνητο, τα άτομα, που κινούνται σε τυχαίες κατευθύνσεις (κίνηση Brown) με ταχύτητες που ακολουθούν μια Μαξγουελιανή κατανομή, θα προκαλέσουν διαπλάτωση της φασματικής γραμμής, (χωρίς συνολική μετατόπιση), καθώς αυτή θα αποτελείται από ένα σύνολο συχνοτήτων συμμετρικά μετατοπισμένων ως προς την κεντρική συχνότητα (βλ. σχήμα 7)

Η μέση ταχύτητα για ένα αέριο θερμοκρασίας  $T$ , δίνεται από τη σχέση

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{M\pi}} \quad (20)$$

όπου  $k$  είναι η σταθερά *Boltzmann* και  $M$  η μάζα του ατόμου. Είναι προφανές ότι η διαπλάτωση είναι τόσο μεγαλύτερη όσο μεγαλύτερη είναι η θερμοκρασία του αερίου.



**Σχήμα 7.** Το σχήμα της έντασης  $I$  μιας γραμμής εκπομπής που έχει υποστεί διαπλάτωση Doppler. Φαίνονται, επίσης, οι γραμμές εκπομπής των ατόμων που κινούνται σε διάφορες κατευθύνσεις και έχουν φυσική διαπλάτωση. Τα άτομα, ανάλογα με τις ταχύτητές τους, φαίνονται να εκπέμπουν σε διάφορες συχνότητες γύρω από τη  $\nu_0$  (που είναι η συχνότητα αναφοράς δηλ. για ακίνητη πηγή και ακίνητο παρατηρητή).

Μπορεί να αποδειχθεί ότι το εύρος κατανομής λόγω *Doppler* (*Doppler width*) δίνεται από την σχέση:

$$\Delta \nu^D = 2\nu_0 \sqrt{\frac{2(\ln 2)kT}{Mc^2}} = (7.16 \times 10^{-7}) \nu_0 \sqrt{\frac{T}{M_N}} \quad (21)$$

όπου το  $T$  είναι σε βαθμούς *Kelvin*,  $M_N$  είναι ο μαζικός αριθμός και  $\nu_0$  η συχνότητα σε  $\text{Hz}$  ( $=1/\text{sec}$ ).

Ακολουθεί ένας πίνακας διαπλάτωσης, φυσικών και *Doppler*, για μερικές πολύ γνωστές μεταπτώσεις laser.

**Πίνακας 1.** Διαπλάτωσης, φυσικές ( $\Delta \nu_N$ ) και *Doppler* ( $\Delta \nu_D$ ), για διάφορα είδη laser

Laser Species	$\lambda$ (nm)	$f$	$A$ ( $\text{s}^{-1}$ )	$\Delta \nu_N$ (Hz)	$\Delta \nu_D$ (Hz)
Neon (He-Ne)	632.8	0.012	$3.4 \times 10^6$	$5.4 \times 10^5$	$1.5 \times 10^9$
Argon ion	488.0	0.418	$7.8 \times 10^7$	$1.2 \times 10^7$	$2.7 \times 10^9$
Cadmium (He-Cd)	441.6	0.006	$1.4 \times 10^6$	$2.2 \times 10^5$	$1.1 \times 10^9$
Copper	510.5	0.005	$2.0 \times 10^6$	$2.2 \times 10^7$	$2.3 \times 10^9$

**(γ) Διαπλάτωση που προκαλείται από κρούσεις**

Η αλληλεπίδραση των ατόμων (κρούσεις) προκαλεί διαπλάτωση των φασματικών γραμμών εκπομπής. Η διαπλάτωση λόγω κρούσεων μπορεί να διαιρεθεί σε δύο κατηγορίες.

**Η πρώτη κατηγορία** περιλαμβάνει κρούσεις που ελαττώνουν το χρόνο ζωής  $\tau_u$  (εξίσωση 10) και τροποποιούν τις σταθερές αποδιέγερσης, τόσο της  $u$  όσο και της  $l$ , σύμφωνα με την εξίσωση (9). Συνεπώς, στην φυσική διαπλάτωση της αντίστοιχης φασματικής γραμμής (εξισώσεις 16, 17) θα προστεθεί ένας όρος που σχετίζεται με την μεταβολή του χρόνου ζωής λόγω κρούσεων. Έτσι, η συνολική διαπλάτωση θα είναι

$$\Delta \nu_{ul} = \frac{1}{2\pi} \left[ \left( \sum_i A_{ui} + \sum_j A_{lj} \right) + \gamma_u^{coll} + \gamma_l^{coll} \right] = \Delta \nu_{ul}^N + \frac{1}{2\pi} (\gamma_u^{coll} + \gamma_l^{coll}) \quad (22)$$

**Η δεύτερη κατηγορία** περιλαμβάνει περιπτώσεις (dephasing collisions) που η σύγκρουση μεταξύ ατόμων δεν αποδιεγείρει το άτομο (όπως είδαμε προηγουμένως), αλλά απλώς προκαλεί απότομη αλλαγή της φάσης του κύματος που εκπέμπεται. Αυτό προκαλεί διαπλάτνωση της φασματικής γραμμής εκπομπής. Οι πληθυσμοί  $N_i$  και  $N_j$  δεν μεταβάλλονται με αυτές τις κρούσεις, οι οποίες συμβαίνουν κατά τη διάρκεια της ακτινοβολίας (μετάπτωσης). Η μεταβολή της φάσης σε κάθε σύγκρουση θεωρείται ότι γίνεται ακαριαία.

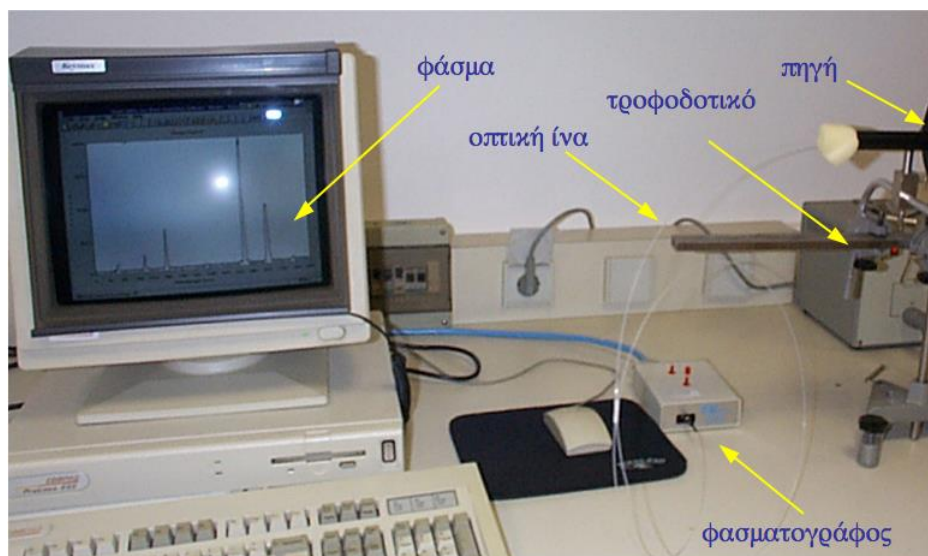
#### (δ) Διαπλάτνωση λόγω παρουσίας ισοτόπων των στοιχείων

Το ισότοπο ενός ατόμου καθορίζεται από τον αριθμό των νετρονίων του πυρήνα για τον ίδιο αριθμό πρωτονίων. Για παράδειγμα το  $He$  απαντάται στη φύση έχει 99.0008%  ${}^4He$  (2 νετρόνια) και 0.00013%  ${}^3He$  (1 νετρόνιο). Το  $Ne$  απαντάται ως 90.8%  ${}^{20}Ne$  (10 νετρόνια), 0.26%  ${}^{21}Ne$  (11 νετρόνια) και 8.9%  ${}^{22}Ne$  (12 νετρόνια). Τα ισότοπα έχουν τα ενεργειακά τους επίπεδα μετατοπισμένα, επομένως η εκπεμπόμενη συχνότητα  $\nu_0$  θα διαφέρει. Υπάρχουν δύο λόγοι μετατόπισης των ενεργειακών σταθμών. Ο πρώτος έχει να κάνει με τη μεταβολή της μάζας και παρέχει αύξηση της συχνότητας εκπομπής για επιπλέον νετρόνια. Ο δεύτερος έχει να κάνει με τη μεταβολή του όγκου του πυρήνα. Αυτό το φαινόμενο είναι σημαντικό μόνο για βαρείς πυρήνες και εξαρτάται από την ηλεκτρονική κατανομή των στοιχείων (είναι σημαντική μόνο αν οι δύο καταστάσεις της μετάπτωσης έχουν διαφορετικό αριθμό  $s$  ηλεκτρονίων).

### 3. Πειραματική Διάταξη

#### 3.1 Απαιτούμενος εξοπλισμός

- Φασματικές πηγές (λάμπες υδραργύρου (Hg), ιωδιούχου θαλλίου (Tl), νατρίου (Na) με τα κατάλληλα τροφοδοτικά και μία λάμπα πυρακτώσεως.
- Τράπεζα στήριξης φασματικών πηγών και συστήματος οπτικής ίνας.
- Συστήματα στήριξης φασματικών πηγών και οπτικής ίνας.
- Οπτική ίνα για την οδήγηση του φωτός στο φασματοσκόπιο.
- Φασματοσκόπιο οπτικής ίνας της εταιρίας Ocean Optics μοντέλο S2000.
- A/D converter της εταιρίας Ocean Optics μοντέλο ADC-500
- Υπολογιστής PC με Windows.

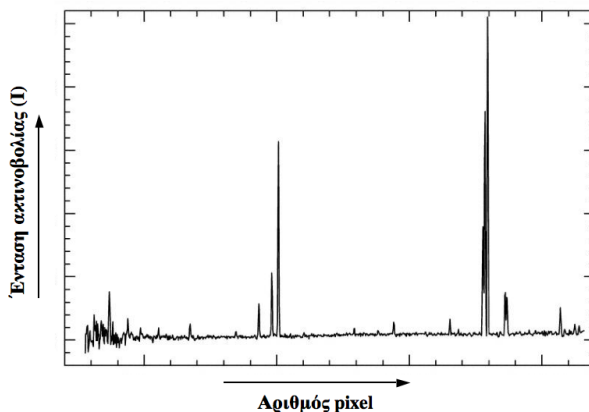


Σχήμα 8: Πειραματική διάταξη

#### 3.2 Περιγραφή των χρησιμοποιούμενων οργάνων

##### Φασματογράφος οπτικής ίνας

Το φασματοσκόπιο S2000 οπτικής ίνας (Σχήμα 8) της εταιρίας Ocean Optics είναι μια μικρογραφία ενός φασματογράφου τύπου Czerny-Turner. Το φως μεταφέρεται στην είσοδο του φασματογράφου με την βοήθεια κατάλληλης οπτικής ίνας (εξ' ου και το όνομά του). Αποτελείται από μια σχισμή εισόδου με πλάτος 50  $\mu\text{m}$ , ένα φακό που εστιάζει το φως από την σχισμή σε ένα φράγμα περίθλασης 600 γραμμών/mm (με κατάλληλα κάτοπτρα). Η περιθλώμενη ακτινοβολία προσπίπτει σε ένα γραμμικό πλέγμα από φωτοδιόδους τοποθετημένες σε μορφή ολοκληρωμένου κυκλώματος. Στην ουσία ο δέκτης φωτός είναι ένα Linear CCD array με 2048 μικροσκοπικούς δέκτες φωτός, που στη συνέχεια θα τους ονομάζουμε pixels, τοποθετημένους ο ένας δίπλα στον άλλο. Ένα pixel έχει διάσταση 12.5  $\mu\text{m} \times 200 \mu\text{m}$ . Όταν ένα φωτόνιο πέσει πάνω στην φωτοευαίσθητη επιφάνεια ενός pixel παράγει ένα ηλεκτρόνιο (μέσω φωτοηλεκτρικού φαινομένου), το οποίο αποθηκεύεται στο pixel, μέχρις ότου να δοθεί η εντολή «ανάγνωσης» της CCD, δηλ. μέτρησης του φορτίου που έχει συγκεντρωθεί σε κάθε pixel. Αυτό επιτυγχάνεται με κατάλληλα ηλεκτρονικά που μετατρέπουν το φορτίο σε ηλεκτρικό ρεύμα αναλογικής μορφής και κατάλληλης εντάσεως. Στη συνέχεια το ρεύμα αυτό οδηγείται στη είσοδο μίας συσκευής που το μετατρέπει σε ψηφιακή μορφή (A/D board). Η συσκευή αυτή είναι κατάλληλη να προσαρμόζεται σε υπολογιστή PC, ο οποίος διαθέτει κατάλληλο λογισμικό (software) που μας απεικονίζει την ένταση του φωτός για κάθε ένα μικροσκοπικό δέκτη (pixel) στην οθόνη του υπολογιστή. Στο Σχήμα 9 φαίνεται ένα παράδειγμα φάσματος όπως εμφανίζεται στην οθόνη του υπολογιστή



Σχήμα 9: Παράδειγμα λαμβανομένου φάσματος

### 3.3 Πειραματική διαδικασία

**ΠΡΟΣΟΧΗ:** Μην αγγίζετε τις λάμπες, παρά μόνο στις βάσεις τους, διότι μπορεί να καείτε!

#### 3.3.1 Προκαταρκτικά βήματα

- Ανοίξτε τον υπολογιστή και τρέξτε τα Windows.
- Ενεργοποιήστε το πρόγραμμα για το φασματοσκόπιο με όνομα OOIBase.
- Εξοικειωθείτε με την λειτουργία του.

#### 3.3.2 Βαθμονόμηση συστήματος

Το πρώτο βήμα, όταν χρησιμοποιούμε ένα φασματογράφο για οποιαδήποτε εφαρμογή, είναι να τον «βαθμονομήσουμε», όπως λέγεται, ώστε να γνωρίζουμε ποια μήκη κύματος αντιστοιχούν στα διάφορα pixel του ανιχνευτή μας.

- Τοποθετήστε την λάμπα υδραργύρου στην οπτική τράπεζα και τροφοδοτήστε την.
- Παρατηρήστε το συνολικό φάσμα της στον υπολογιστή και κάνετε ρυθμίσεις, έτσι ώστε να επιτύχετε μέγιστη ακτινοβολία για την υψηλότερης έντασης φασματική γραμμή. Προσέξτε η γραμμή να μην είναι κορεσμένη.
- Τοποθετήστε τον δρομέα στο μέγιστο κάθε φασματικής γραμμής και σημειώστε τον αντίστοιχο αριθμό pixel.



- Συμπληρώστε τον ακόλουθο πίνακα με τις μετρήσεις σας.
- Εκτιμήστε το σφάλμα που κάνετε στον καθορισμό του κεντρικού pixel
- Με τα πειραματικά δεδομένα για την λάμπα υδραργύρου φτιάξτε τον παρακάτω πίνακα:

$\lambda_{\text{θεωρ}} \text{ (nm)}$	<b>365.02</b>	<b>404.66</b>	<b>435.84</b>	<b>546.08</b>	<b>579.07</b>
<b>Θέση pixel (p)</b>					
<b>Σφάλμα (<math>\Delta p</math>)</b>					

- Κάντε την γραφική παράσταση του μήκους κύματος  $\lambda$  συναρτήσει της θέσης  $p$
- Προσομοιώστε τα αποτελέσματά σας με εξίσωση πρώτου βαθμού της μορφής  $\lambda = a + bp$  όπου  $\lambda$  το μήκος κύματος σε nm και  $p$  τα pixel και προσδιορίστε τους συντελεστές  $a$ ,  $b$  και τα αντίστοιχα σφάλματα  $\sigma_a$  και  $\sigma_b$  χρησιμοποιώντας την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων (από Εργ. Φυσ. Ι και ΙΙ) Αυτή είναι η καμπύλη βαθμονόμησης του φασματογράφου.
- Αν χρειαστεί μπορείτε να χρησιμοποιήσετε καμπύλη 2<sup>ου</sup> βαθμού. Επίσης, μπορείτε να συμπεριλάβετε στην βαθμονόμησή σας και αμυδρότερες γραμμές, των οποίων τα μήκη κύματος θα βρείτε στην άσκηση του «Οπτικού Φράγματος»).

### 3.3.3 Προσδιορισμός μήκους κύματος φασματικής γραμμής

- Στη συνέχεια τοποθετήστε τις λάμπες θαλλίου και νατρίου διαδοχικά και επαναλάβετε την ίδια διαδικασία για τις δύο πιο έντονες φασματικές γραμμές εκπομπής τους.
- Με τα στοιχεία αυτά, προσδιορίστε το μήκος κύματος για τις φασματικές γραμμές του θαλλίου και του νατρίου, χρησιμοποιώντας την καμπύλη βαθμονόμησης που προσδιορίσατε στο προηγούμενο μέρος του πειράματος. Να προσδιορίσετε το πειραματικό σφάλμα του αποτελέσματός σας.

### 3.3.4 Προσδιορισμός διακριτικής ικανότητας του φασματογράφου

- Τοποθετήστε πάλι την λάμπα υδραργύρου και διαλέξτε μια από τις φασματικές γραμμές.
- Με την βοήθεια του προγράμματος διαλέξτε μία περιοχή pixels έτσι ώστε να βλέπετε στην οθόνη σας μόνο την φασματική γραμμή που διαλέξατε (όπως φαίνεται στο σχήμα 5)
- Μετρήστε τον αριθμό των pixels,  $p_{\text{τελικό}} - p_{\text{αρχικό}}$ , που αντιστοιχούν στο πλάτος της γραμμής, στο μισό της μέγιστης έντασης (full width at half maximum). Υπολογίστε τα αντίστοιχα μήκη κύματος (με την βοήθεια της καμπύλης βαθμονόμησης), και το αντίστοιχο  $\Delta\lambda$ , για το πλάτος της συγκεκριμένης φασματικής γραμμής.
- Υπολογίστε την διακριτική ικανότητα του φασματοσκοπίου από την εξίσωση  $R = \lambda / \Delta\lambda$ . Εξηγήστε γιατί ο λόγος  $R$  που υπολογίσατε όντως ταυτίζεται με την διακριτική ικανότητα φασματοσκοπίου (όπου το  $\Delta\lambda$  είναι η απόσταση μεταξύ δύο γειτονικών φασματικών γραμμών που μόλις ξεχωρίζουν μεταξύ τους, σύμφωνα με το κριτήριο Rayleigh).
- Επαναλάβετε την διαδικασία προσδιορισμού του  $R$  και για τις υπόλοιπες γραμμές του φάσματος του Hg. Παρατηρήστε ότι μία από τις γραμμές έχει πολύ μεγαλύτερο πλάτος από τις άλλες. Πού οφείλεται αυτό;
- Βρείτε την μέση τιμή των μετρήσεων σας για το  $R$ , και το αντίστοιχο σφάλμα (χωρίς να συμπεριλάβετε την προαναφερθείσα γραμμή). Ποιό είναι το αντίστοιχο φασματικό εύρος,  $\Delta\nu = \frac{c}{\lambda^2} \Delta\lambda$  (σε GHz).
- Συγκρίνατε την τάξη μεγέθους των  $\Delta\nu$  λόγω φυσικής διαπλάτνωσης και λόγω διαπλάτνωσης Doppler που αναφέρονται στην θεωρία, με το  $\Delta\nu$  του φασματογράφου σας. Σχολιάστε.

### 3.3.5 Μελέτη συνεχούς φάσματος λάμπας πυρακτώσεως

- Τοποθετήστε την λάμπα πυρακτώσεως μπροστά από την είσοδο της οπτικής ίνας.



- Παρατηρήστε το φάσμα που λαμβάνετε στην οθόνη σας. Συγκρίνετέ το με τα φάσματα των άλλων πηγών που χρησιμοποιήσατε. Σχολιάστε.
- Βρείτε το μήκος κύματος που αντιστοιχεί στο μέγιστο της κατανομής.
- Από τον νόμο μετατόπισης του Wien υπολογίστε την θερμοκρασία του εκπέμποντος σώματος. Υπολογίστε το πειραματικό σφάλμα της μέτρησής σας.
- Σχολιάστε ποιος παράγοντας θα μπορούσε να επηρεάσει σημαντικά την εκτίμησή σας για την θερμοκρασία, και με ποιόν τρόπο θα μπορούσατε να ελαχιστοποιήσετε το σφάλμα αυτό.

### **Βιβλιογραφία**

- H.E. White, Introduction to Atomic Spectra, McGraw-Hill Co.
- S. Walker and H. Straw, Spectroscopy, Vol.1, Chapman, & Hall Ltd and Science paperbacks
- <http://www.nist.gov/pml/data/asd.cfm>

## 9. ΜΕΛΕΤΗ ΚΥΜΑΤΙΚΩΝ ΦΑΙΝΟΜΕΝΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΜΙΚΡΟΚΥΜΑΤΩΝ – ΠΕΡΙΘΛΑΣΗ FRESNEL

### 1. Σκοπός

- Παραγωγή μικροκυμάτων
- Μέτρηση μήκους κύματος μικροκυμάτων με χρήση
  - Στασίμων κυμάτων
  - Συμβολομέτρου Michelson
- Μέτρηση δείκτη διάθλασης παραφίνης
- Μέτρηση βάθους διείσδυσης ακτίνας μικροκυμάτων
- Μελέτη φαινομένου Μετατοπισμένης Ολικής Εσωτερικής Ανάκλασης (Μετατόπιση Goos – Hänchen)
- Μελέτη περίθλασης μικροκυμάτων από ορθογώνια σχισμή.
- Η περίπτωση περίθλασης Fresnel.

### 2. Θεωρία

#### Βασική προαπαιτούμενη γνώση

- Παρόν εγχειρίδιο, Κεφ. «Μελέτη Περίθλασης Fraunhofer», παρ. 2.1, 2.2, 2.6
- Serway, Physics for Scientists & Engineers, Τόμος ΙΙΙ, Κεφ. 37.7, 35.5, 35,7 (συμπεριλαμβανομένων των αντίστοιχων παραδειγμάτων και προβλημάτων).

#### 2.1 Παραγωγή Μικροκυματικής Ακτινοβολίας

Τα μικροκύματα είναι ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία με μήκη κύματος στην περιοχή 0.1-10cm. Η περιοχή αυτή είναι ενδιάμεση μεταξύ της περιοχής uhf (περιοχής λειτουργίας των ραδιοφωνικών σταθμών και της τηλεόρασης) και της οπτικής περιοχής του μακρινού υπέρυθρου.

Για την περιοχή uhf (ultra high frequency) οι πομποί και οι δέκτες χρησιμοποιούν κυκλώματα συντονισμού LC σε κάποια συχνότητα, σε συνδυασμό με ενισχυτές (τρανζίστορ ή λυχνίες κενού παλαιότερα).

Τα μικροκύματα που θα μελετήσουμε έχουν μήκος κύματος της τάξης των 3cm και από τον τρόπο παραγωγής τους αποτελούν μια ακτινοβολία μονοχρωματική, γραμμικά πολωμένη και σύμφωνη.

#### 2.2 Στάσιμα κύματα

Θεωρούμε επίπεδο κύμα που κινείται κατά μήκος άξονα x και ανακλάται σε επιφάνεια η οποία είναι κάθετη στον άξονα x. Το ανακλώμενο κύμα προστίθεται με το προσπίπτον, σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, και σχηματίζεται το στάσιμο κύμα.

Το στάσιμο κύμα μπορεί να παρασταθεί από την εξίσωση

$$E = A \sin \omega \left( \frac{x}{c} - t \right) + A \sin \omega \left( \frac{x}{c} + t \right) \quad (1)$$

δηλαδή,

$$E = 2A \sin \left( \frac{\omega x}{c} \right) \cos \omega t \quad (2)$$

όπου  $\omega$  είναι η κυκλική συχνότητα και  $c$  η ταχύτητα διάδοσης του κύματος.

Παρατηρούμε ότι το πλάτος του στάσιμου κύματος είναι περιοδική συνάρτηση της θέσης και δίνεται από τον όρο

$$2A \sin \left( \frac{\omega x}{c} \right) \quad (3)$$

Το πλάτος αυτό μηδενίζεται στα σημεία για τα οποία:

$$\sin \left( \frac{\omega x}{c} \right) = 0 \quad (4)$$

δηλαδή, εκεί όπου ισχύει

$$x = n \frac{\pi c}{\omega} \quad (5)$$

Δεδομένου ότι

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi \frac{c}{\lambda} \quad (6)$$

έπεται ότι

$$x = n \frac{\lambda}{2}, \text{ όπου } n=0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

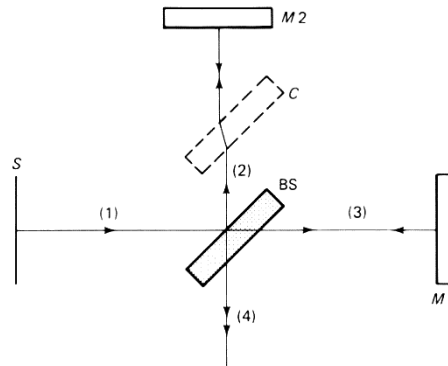
Επομένως, το στάσιμο κύμα έχει χωρική περίοδο ίση με  $\lambda/2$ , δηλαδή το μισό της περιόδου των συνιστώντων κυμάτων. Τα σημεία στα οποία το στάσιμο κύμα μηδενίζεται λέγονται *δεσμοί*. Τα σημεία για τα οποία ισχύει

$$\sin\left(\frac{\omega x}{c}\right) = 1 \quad (8)$$

είναι τα σημεία μέγιστου δυνατού πλάτους και ονομάζονται *κοιλίες*.

### 2.3 Συμβολόμετρο Michelson

Στην περίπτωση του συμβολομέτρου του Michelson (Σχήμα 3) το προσπίπτον κύμα διαιρείται σε δύο σύμφωνα κύματα. Τα μερικά αυτά κύματα, άνισου γενικά πλάτους, προστίθενται μετά την ανάκλασή τους σε μεταλλικές επιφάνειες, οπότε σχηματίζονται μέγιστα και ελάχιστα ως συνάρτηση της θέσης των ανακλαστήρων.



Σχήμα 3: Συμβολόμετρο Michelson

Πράγματι, τα δύο αυτά μερικά ημιτονοειδή κύματα πολωμένα κατά το ίδιο επίπεδο, της ίδιας συχνότητας  $\omega$ , αλλά διαφορετικού πλάτους και διαφορετικής φάσης

$$E_x = A_x \cos(\omega t - \phi_x) \quad (9)$$

$$E_y = A_y \cos(\omega t - \phi_y) \quad (10)$$

συναντούνται στο σημείο  $\Delta$ .

Το συνιστάμενο κύμα στο  $R_e$  είναι άθροισμα των  $E_x$  και  $E_y$ .

$$E = A_x \cos(\omega t - \phi_x) + A_y \cos(\omega t - \phi_y) \quad (11)$$

δηλαδή

$$E = A \cos(\omega t - \phi) \quad (12)$$

με ένταση  $I$ :

$$I = A^2 \quad (13)$$

όπου

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_x A_y \cos(\phi_x - \phi_y) \quad (14)$$

Έτσι, η ένταση  $I$  (ή το τετράγωνο του πλάτους) είναι μέγιστη όταν η διαφορά φάσης  $(\phi_x - \phi_y)$  είναι μηδέν ή άρτιο πολλαπλάσιο του  $\pi$ , οπότε τα δύο κύματα είναι σε φάση. Αντίθετα, η ένταση είναι ελάχιστη όταν  $(\phi_x - \phi_y)$  είναι ίση με  $\pi$  ή περιττό πολλαπλάσιο του  $\pi$ .

Έχουμε ότι

$$\phi_x - \phi_y = \frac{2\pi}{\lambda} (2d_x - 2d_y) \quad (15)$$

Αν

$$d = d_x - d_y \quad (16)$$

τότε

$$\phi_x - \phi_y = \frac{2\pi}{\lambda} 2d \quad (17)$$

Παρατηρούμε ότι η ένταση γίνεται μέγιστη όταν

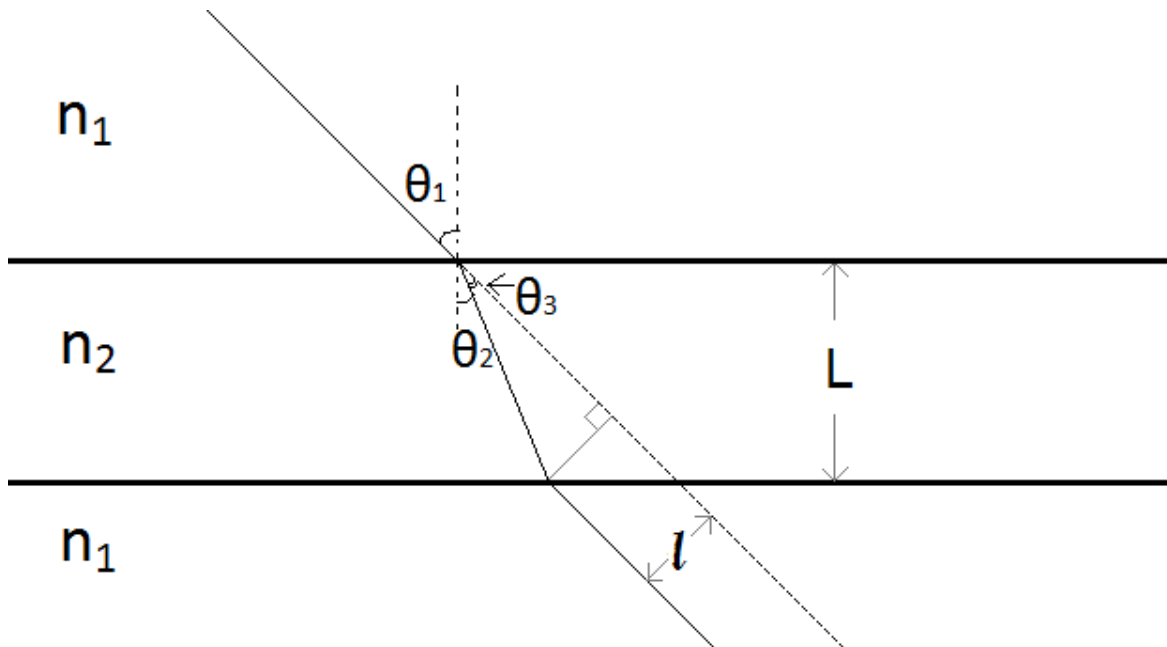
$$\frac{2\pi}{\lambda} 2d = 2\pi \cdot m, \quad m=0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

δηλαδή όταν

$$d = m \frac{\lambda}{2} \quad (19)$$

#### 2.4 Μέτρηση δείκτη διάθλασης από την μετατόπιση του Η/Μ κύματος.

Ένας απλός τρόπος να μετρήσουμε πειραματικά το δείκτη διάθλασης ενός οπτικού μέσου είναι χρησιμοποιώντας μια δέσμη Η/Μ κύματος. Στέλνοντας μια παράλληλη δέσμη Η/Μ κύματος προς το οπτικό μέσο και μετρώντας έπειτα την μετατόπιση που θα προκαλέσει η διάβαση μέσα από το οπτικό μέσο μπορώ να προσδιορίσω τον δείκτη διάθλασης του.



**Σχήμα 4:** Η/Μ ακτίνα που διέρχεται σε μέσο 1 προσπίπτει με γωνία  $\theta_1$  σε μέσο 2 εκτρέπεται κατά γωνία  $\theta_2$  και έπειτα διασχίζοντας το μέσο 2 εξέρχεται στο μέσο 1 σε διεύθυνση παράλληλη με την αρχική.

Από τον νόμο του Snell μπορώ εύκολα να αποδείξω πως η αρχική ακτίνα είναι παράλληλη προς την τελική. Παρατηρούμε όμως πως λόγω του υλικού 2 από το οποίο διέρχεται η δέσμη υπάρχει μια εκτροπή της δέσμης, κατά  $l$ , από την αρχική της κατεύθυνση.

Καθώς η δέσμη περνάει από το υλικό 1 στο υλικό 2 ισχύει από τον νόμο του Snell:

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2) \quad (20)$$

Με την σχέση (20) και βασικές γνώσεις τριγωνομετρίας καταλήγω στο ότι

$$l = L \cdot \left[ \sin(\theta_1) - \cos(\theta_1) \frac{\frac{n_1}{n_2} \sin(\theta_1)}{\sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2(\theta_1)}} \right] \quad (21)$$

ή συναρτήσει του  $n_2$ :

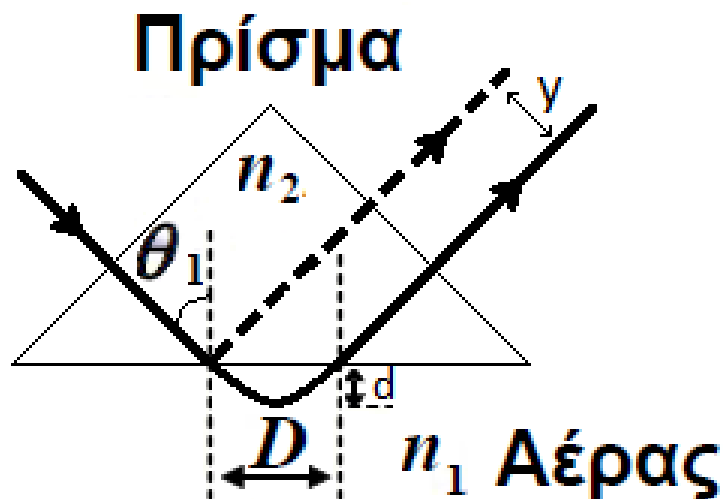
$$n_2 = n_1 \sin(\theta_1) \sqrt{1 + \frac{\cos^2(\theta_1)}{\left(\frac{l}{L} - \sin(\theta_1)\right)^2}} \quad (22)$$

(Αποδείξατε τους τύπους εξισώσεων 21 και 22 στην αναφορά σας!)

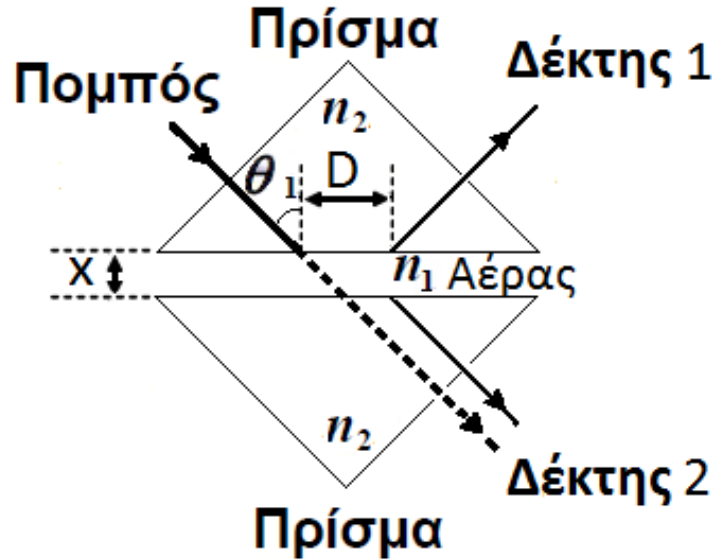
## 2.5: Μετατοπισμένη Ολική Εσωτερική Ανάκλαση (Μετατόπιση Goos – Hänchen)

### 2.5.1. Εισαγωγή

Όταν ένα Η/Μ κύμα διαδίδεται από ένα οπτικό μέσο σε ένα δεύτερο οπτικά αραιότερο μέσο τότε έχετε διδαχθεί πως εάν η γωνία πρόσπτωσης ξεπερνά την κρίσιμη γωνία τότε συμβαίνει το φαινόμενο της ολικής εσωτερικής ανάκλασης (ΟΕΑ - total internal reflection). Στην πραγματικότητα όμως, αντί της ΟΕΑ που συμβαίνει ακριβώς στα όρια της επιφάνειας των δύο μέσων και η οποία ακολουθεί τους νόμους της γεωμετρικής οπτικής, το προσπίπτον κύμα διεισδύει στο οπτικά αραιότερο μέσο και ταξιδεύει παράλληλα με τη διαχωριστική επιφάνεια των δύο μέσων, σε μια μικρή απόσταση πριν διαδοθεί ξανά πίσω στο οπτικά πυκνότερο μέσο. (βλέπε Σχήμα 5). Αυτό το φαινόμενο, γνωστό ως φαινόμενο Goos-Hänchen, περιγράφεται από τη μετατόπιση  $D$  της προσπίπτουσας ακτινοβολίας.



**Σχήμα 5:** Ολική Εσωτερική Ανάκλαση Η/Μ ακτινοβολίας από πρίσμα. Η μετατόπιση  $D$  της ακτινοβολίας παράλληλα με τη διαχωριστική επιφάνεια είναι γνωστή ως φαινόμενο Goos-Hänchen.



**Σχήμα 6:** Τα δύο πρίσματα με διάκενο αέρα μεταξύ τους μήκους  $x$ . Πέρα από την μετατόπιση Goos-Hänchen, σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να παρατηρήσουμε μια ανακλώμενη δέσμη (όπου κατευθύνεται στον μετρητή 1) και μια μεταδιδόμενη (όπου κατευθύνεται στον μετρητή 2).

Εάν ένα δεύτερο οπτικό μέσο με δείκτη διάθλασης  $n_2$  (δηλ. από το ίδιο υλικό όπως το πρώτο οπτικό μέσο) τοποθετηθεί σε μικρή απόσταση  $x$  από το πρώτο μέσο, τότε παρατηρείται η διάδοση του Η/Μ κύματος στο δεύτερο μέσο (βλέπε Σχήμα 6). Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό ως Ανεκπλήρωτη Ολική Εσωτερική Ανάκλαση (ΑΟΕΑ). Η ένταση του κύματος της μεταδιδόμενης δέσμης,  $I_t$ , που μεταφέρεται στο οπτικό μέσο 1 ελαττώνεται εκθετικά με την απόσταση  $d$  που συμβολίζει το βάθος διείσδυσης σύμφωνα με τη σχέση:

$$I_t = I_0 \exp\left(-\frac{x}{d}\right) \quad (23)$$

Όπου

$$d = \frac{\lambda}{4\pi n_2 \sqrt{\sin^2(\theta_1) - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2}} \quad (24)$$

Με το  $\lambda$  να είναι το μήκος κύματος του Η/Μ κύματος στο μέσο 1 και  $n_2$  ο δείκτης διάθλασης του μέσου 2 (υποθέστε ότι ο δείκτης διάθλασης του μέσου 1, αέρας, είναι 1.0).

Ενώ βέβαια ισχύει και ότι:

$$I_0 = I_r + I_t \quad (25)$$

Όπου  $I_r$  είναι η ένταση της ακτινοβολίας της δέσμης που ανακλάται

Το βάθος διείσδυσης της δέσμης συνδέεται επίσης και με τη μετατόπιση  $y$  που παρατηρούμε στην ακτίνα και απεικονίζεται στο σχήμα 5 ακολουθώντας τον τύπο:

$$y = 4d \sin(\theta) \quad (26)$$

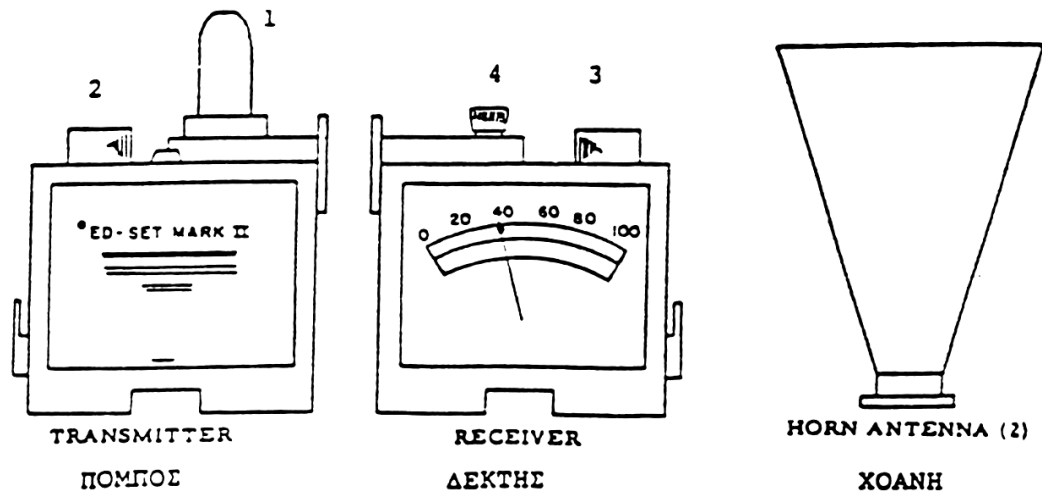
Τέλος το  $y$  με την σειρά του συσχετίζεται άμεσα με τη μετατόπιση Goos-Hänchen από την σχέση:

$$D = \frac{y}{\cos(\theta)} \quad (27)$$

### 3. Περιγραφή της πειραματικής διάταξης

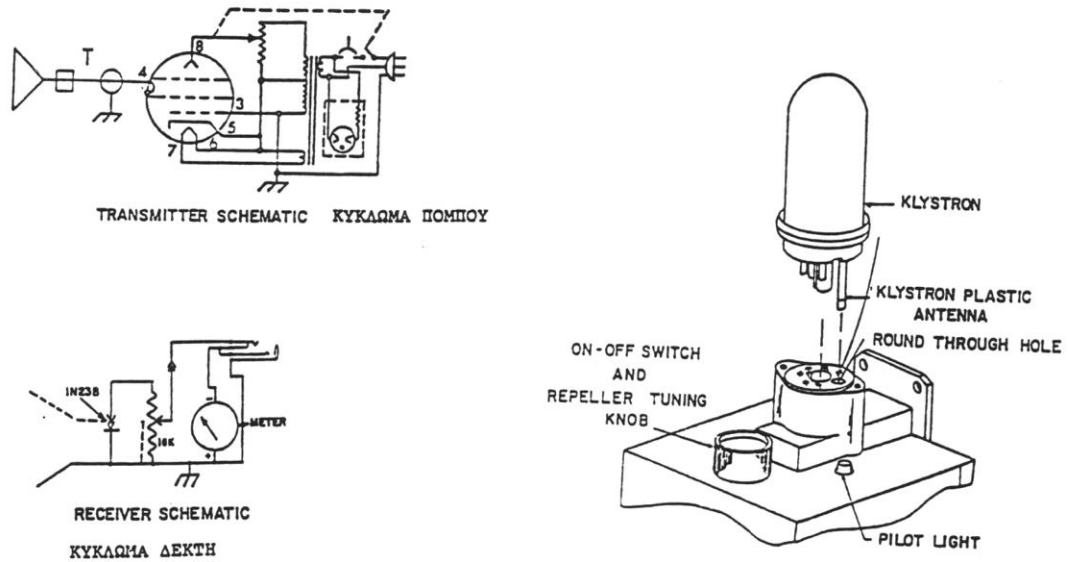
Ο *πομπός μικροκυμάτων* (transmitter - Σχήμα 13) που θα χρησιμοποιήσετε, αποτελείται από μία λυχνία klystron (Σχήμα 13, 1), με το κατάλληλο ηλεκτρικό κύκλωμα. Η λυχνία είναι εφοδιασμένη με χοάνη (horn antenna) για την συγκέντρωση της ακτινοβολίας σε άνοιγμα περίπου 30°. Λειτουργεί με εναλλασσόμενη τάση 115

Volts. Εκπέμπει ακτινοβολία σταθερής συχνότητας στην περιοχή 10000-11000MHz. Η ακριβής συχνότητα, ή το μήκος κύματος, της μικροκυματικής ακτινοβολίας μετράται πειραματικά π.χ. με το σχηματισμό στάσιμων κυμάτων μεταξύ του πομπού και ενός ανακλαστήρα, και τον προσδιορισμό των δεσμών του στάσιμου κύματος με τον δέκτη. Απαιτούνται μερικά λεπτά για την θέρμανση και την κανονική λειτουργία της λυχνίας. Η λυχνία θερμαίνεται πολύ. **ΜΗΝ ΤΗΝ ΑΓΓΙΖΕΤΕ!** Ο πομπός μπαίνει σε λειτουργία γυρίζοντας τον διακόπτη (Σχήμα 13, 2) *OFF-REPELLER* ο οποίος χρησιμεύει επίσης και για την ρύθμιση της έντασης της ακτινοβολίας.



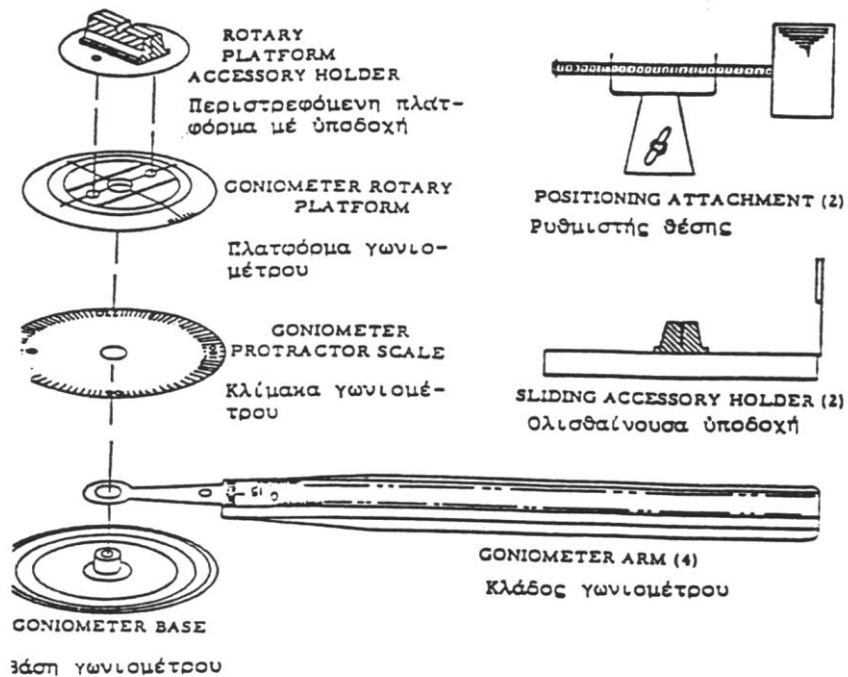
Σχήμα 13: Πομπός και δέκτης μικροκυμάτων

Ο *δέκτης μικροκυμάτων* (receiver - Σχήμα 13) αποτελείται από μικρο-αμπερόμετρο, κρυσταλλικό δέκτη και ποτενσιομετρικό έλεγχο της ενίσχυσης. Είναι επίσης εφοδιασμένος με χοάνη όμοια με εκείνη του δέκτη. Με τον διακόπτη (Gain - Σχήμα 13, 3) ρυθμίζουμε την ενίσχυση του δέκτη. Ο μικρός κόκκινος διακόπτης (Σχήμα 13, 4) συγκρατεί τον κρυσταλλικό δέκτη στη θέση του. Η υποδοχή στο πίσω μέρος του δέκτη επιτρέπει την σύνδεσή του με ανεξάρτητο ενισχυτή. Το μικρο-αμπερόμετρο σε πλήρη απόκλιση δείχνει 100μΑ. Οι ενδείξεις του είναι ανάλογες της ισχύος του σήματος. Η μικρή πλαστική βίδα στο κάτω μέρος του αμπερόμετρου είναι για τη ρύθμιση του μηδενός του οργάνου. Το Σχήμα 14 μας δίνει λεπτομέρειες των κυκλωμάτων του πομπού και του δέκτη.



Σχήμα 14: Κυκλώματα πομπού και δέκτη μικροκυμάτων

Στο Σχήμα 15 φαίνονται λεπτομέρειες του γωνιομέτρου που χρησιμοποιούμε στα πειράματά μας.



Σχήμα 15: Γωνιόμετρο



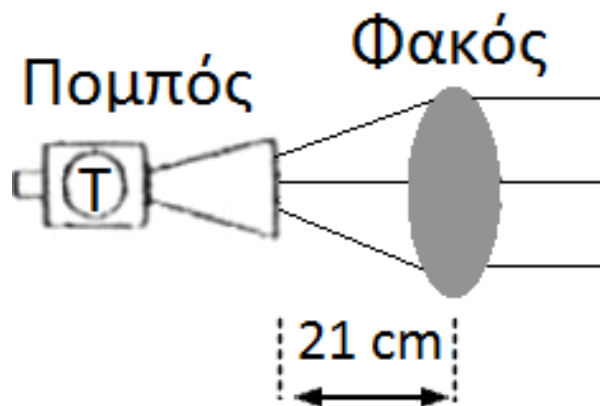
Φακός και πρίσματα από παραφίνη:



*Πρίσματα παραφίνης:* Στο κομμάτι 4.2-4.4 του πειράματος θα χρησιμοποιήσετε πρίσματα από παραφίνη. Η παραφίνη είναι υλικό διαφανές στην περιοχή όπου εκπέμπει ο *πομπός μικροκυμάτων* και έτσι μπορούμε με βάση αυτήν να κατασκευάζουμε πρίσματα. Τα πρίσματα που θα χρησιμοποιήσετε είναι κύβοι πλευράς  $L = 21.7\text{cm}$  κομμένοι στην μέση έτσι ώστε να σχηματίζουν ισοσκελή τρίγωνα. Ο θεωρητικός δείκτης διάθλασης των πρισμάτων είναι  $n_{\text{θεωρ}} \cong 1,48$ .

*Φακός παραφίνης:* Επειδή ο *πομπός μικροκυμάτων* που χρησιμοποιούμε δεν παράγει δέσμη μικροκυμάτων με εντελώς καθορισμένη κατεύθυνση, στρέφουμε την δέσμη πριν αυτή προσκρούσει στα πρίσματα, πάνω στον φακό.

Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την βελτίωση της κατεύθυνσης της δέσμης έτσι ώστε αυτή να γίνει όσο το δυνατόν παράλληλη.



Σχήμα 16: Βελτίωση κατεύθυνσης της δέσμης

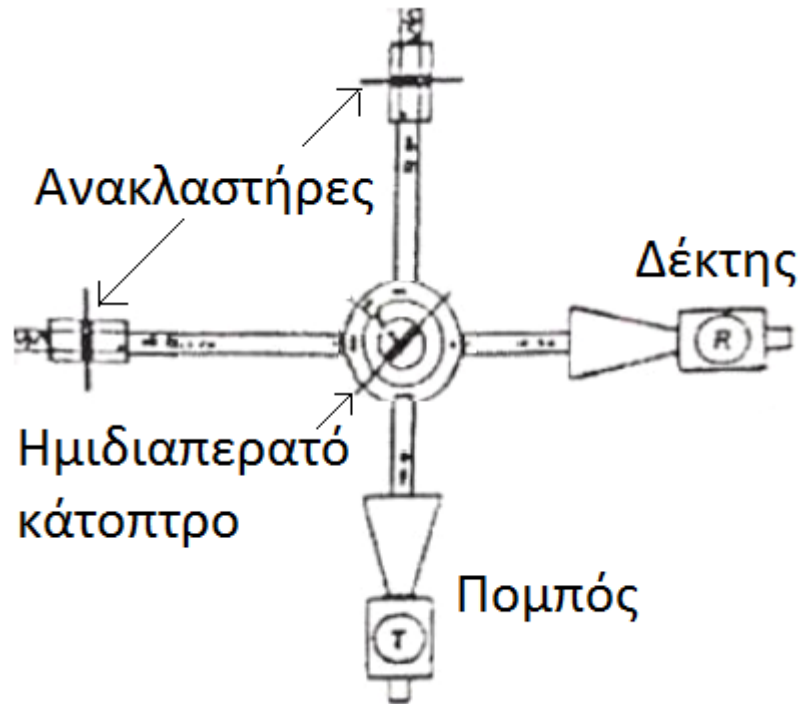
Για την καλύτερη επίτευξη αυτού του σκοπού τοποθετούμε το κέντρο του φακού σε απόσταση 21 cm από την χοάνη του πομπού μικροκυμάτων.

## 4. Εκτέλεση του πειράματος

### 4.1 Μέτρηση μήκους κύματος με το συμβολόμετρο του Michelson

#### Πειραματική Διαδικασία:

- Πραγματοποιείτε η διάταξη του Σχήματος 17.
- Ρυθμίστε με ακρίβεια τις θέσεις ανακλαστήρων, πομπού και δέκτη μέχρις ότου πάρετε μέγιστη ένδειξη.

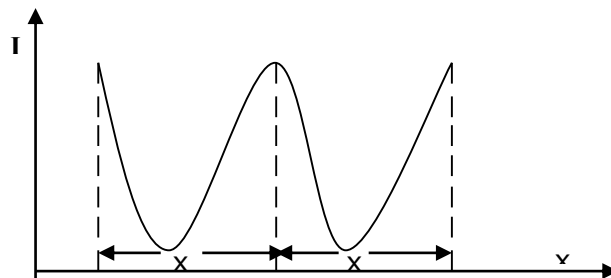


Σχήμα 17: Συμβολόμετρο του Michelson

- Μετακινήστε τον ανακλαστήρα που βρίσκεται σε γωνία  $270^\circ$  από τον πομπό μέχρις ότου πάρετε εκ νέου μέγιστη ένδειξη. Η απόσταση μεταξύ της αρχικής και τελικής θέσης του ανακλαστήρα των  $270^\circ$  είναι, σύμφωνα με την σχέση (19), ίση με  $\lambda/2$ . Το μήκος κύματος,  $\lambda$ , προσδιορίζεται από τις αποστάσεις μεταξύ των μεγίστων.

#### Ζητούμενα:

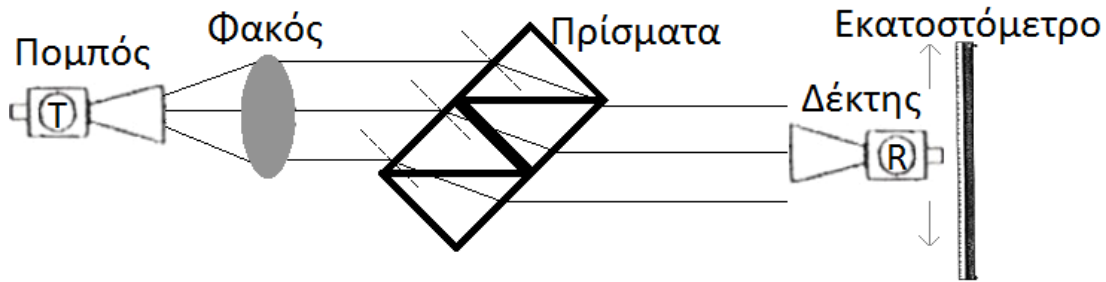
- Σχεδιάστε τη μορφή του στάσιμου κύματος (ένταση συναρτήσει της θέσης),  $I=I(x)$



- Υπολογίστε το μήκος κύματος των μικροκυμάτων ( $x=\lambda/2$ ). Εκτιμήστε το σφάλμα της μέτρησής σας.

#### 4.2 Μέτρηση δείκτη διάθλασης λόγω μετατόπιση Η/Μ κύματος:

- Πραγματοποιείτε την διάταξη του Σχήματος 18.

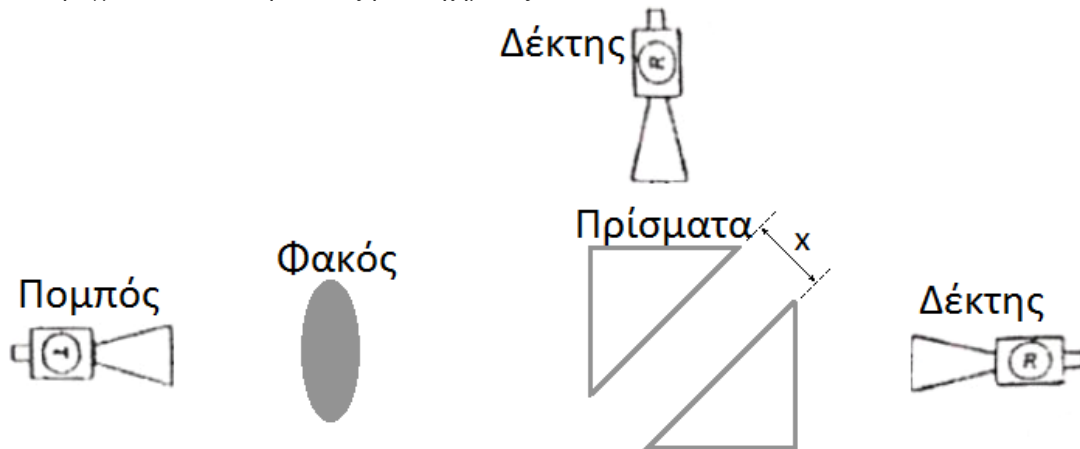


Σχήμα 18: Διάταξη για την μέτρηση δείκτη διάθλασης της παραφίνης

- Εντοπίστε ένα σημείο όπου η ένδειξη του δέκτη είναι χαμηλή αλλά όχι μηδενική. Μετακινήστε τον δέκτη κατά 0,5cm παίρνοντας αρκετές μετρήσεις έτσι ώστε να καταγράψετε ένα μέγιστο έπειτα συνεχίστε, μέχρι να φτάσετε σε ένδειξη όμοια με αυτή την οποία ξεκινήσατε.
- ΧΩΡΙΣ να μετακινήσετε το εκατοστόμετρο, επαναλάβετε την παραπάνω διαδικασία αφαιρώντας τα πρίσματα.
- Παραστήστε σε κοινή γραφική παράσταση  $I = f(x)$  τις μετρήσεις σας. Με βάση τις γραφικές παραστάσεις βρείτε την διαφορά απόστασης  $l$  μεταξύ των μεγίστων.
- Με βάση την σχέση (22) βρείτε τον δείκτη διάθλασης της παραφίνης και συγκρίνετε τον με την θεωρητική τιμή. Εκτιμήστε το σφάλμα της μέτρησής σας και σχολιάστε.

#### 4.3 Μέτρηση Βάθους διείσδυσης:

- Πραγματοποιείτε την διάταξη του Σχήματος 19.



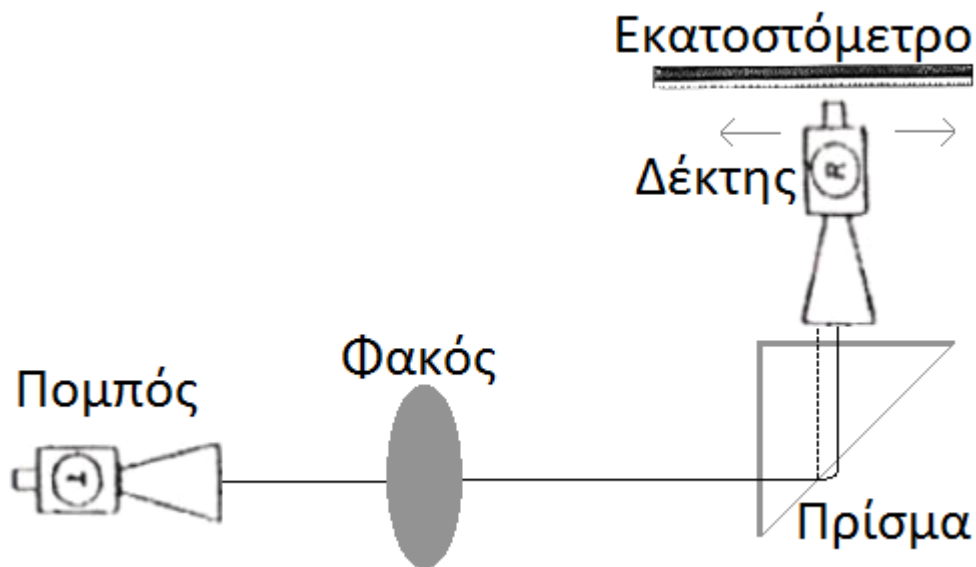
Σχήμα 19: Διάταξη για την μελέτη βάθους διείσδυσης.

- Για αποστάσεις πρισμάτων από 0,1 cm έως 3,0 cm με βήμα 0,1 cm. Καταγράψτε τις ενδείξεις έντασης των δυο δεκτών
- Υπολογίστε ξεχωριστά το άθροισμα των ενδείξεων των δεκτών.
- Σε κοινή γραφική παράσταση  $I = f(x)$  αναπαραστήστε τις ενδείξεις των δύο μετρητών καθώς και το άθροισμα τους. Τι παρατηρείτε; Σχολιάστε με λαμβάνοντας υπόψη το τύπο (25).
- Με βάση τις μετρήσεις από έναν μετρητή, προσεγγίστε την γραφική παράσταση που κατασκευάσατε με φθίνοντα εκθετικά  $I_t = I_0 \exp(-\frac{x}{d})$  ή  $I_r = I_0 (1 - \exp(-\frac{x}{d}))$  διαφορετικά κατασκευάστε τις

γραφικές παραστάσεις  $\ln(I_t) = f(x)$  ή  $\ln(I_0 - I_t) = f(x)$ . Προσδιορίστε έτσι το  $d$  της σχέσης (23) και συγκρίνετε το με την θεωρητική τιμή που βρίσκετε με βάση τα δεδομένα του πειράματός σας.

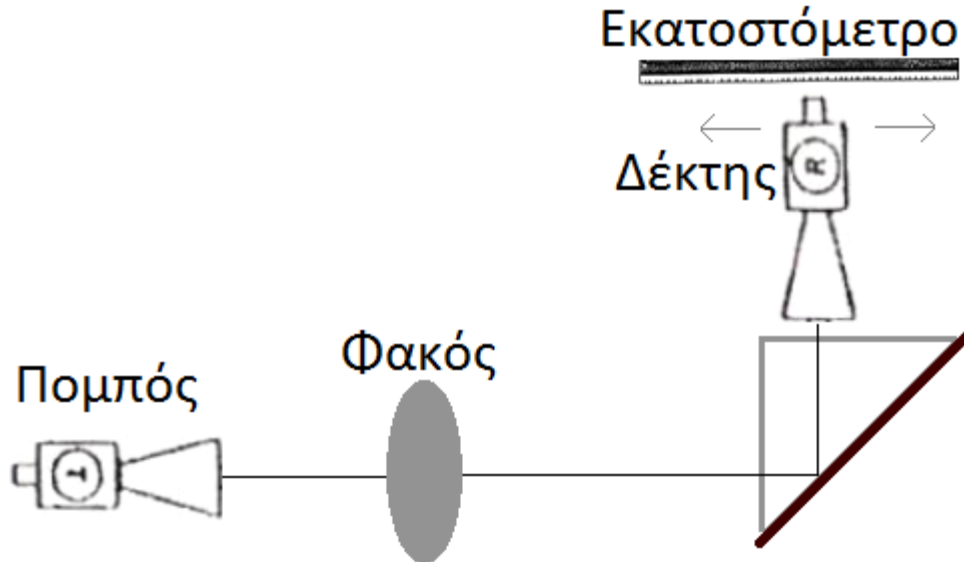
#### 4.4 Μέτρηση Μετατοπισμένης Ολικής Εσωτερικής Ανάκλασης (Μετατόπιση Goos – Hänchen):

- Πραγματοποιείτε την διάταξη του Σχήματος 20.



**Σχήμα 20:** Διάταξη για την μελέτη μετατόπισης Goos – Hänchen όπου η πραγματική ποριά της δέσμης φαίνεται μια μαύρη γραμμή, ενώ η πορεία της δέσμης εάν συνέβαινε γεωμετρικά η ανάκλαση φαίνεται με διακεκομμένη.

- Εντοπίστε ένα σημείο όπου η ένδειξη του δέκτη είναι περίπου μισή της μέγιστης. Μετακινήστε τον δέκτη κατά 0,2 cm παίρνοντας αρκετές μετρήσεις έτσι ώστε να καταγράψετε ένα μέγιστο έπειτα συνεχίστε μέχρι να φτάσετε σε ένδειξη όμοια με αυτή με την οποία ξεκινήσατε.
- ΧΩΡΙΣ να μετακινήσετε το εκατοστόμετρο, πραγματοποιήστε την διάταξη του σχήματος 21 τοποθετώντας μια μεταλλική πλάκα στην υποτείνουσα του τριγωνικού πρίσματος, Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η δέσμη να ανακλάται γεωμετρικά.



**Σχήμα 21:** Διάταξη για την μελέτη μετατόπισης Goos – Hänchen, με την τοποθέτηση της πλάκας η δέσμη πραγματοποιεί ανάκλαση σύμφωνα με την γεωμετρική οπτική.

- Σε κοινή γραφική παράσταση  $I = f(x)$  αναπαραστήστε τις μετρήσεις σας και υπολογίστε την απόσταση  $y$  των μεγίστων στις δύο περιπτώσεις. Μπορείτε να κάνετε τον υπολογισμό ανάλογα με την ποιότητα των μετρήσεων σας, είτε παίρνοντας την διαφορά των θέσεων της μέγιστης ένδειξης σε κάθε περίπτωση, είτε προσεγγίζοντας τις δυο καμπύλες με πολυώνυμο δευτέρου βαθμού και βρίσκοντας το μέγιστο τους από το σημείο μηδενισμού της πρώτης παραγώγου τις εξίσωσης που θα πάρετε.
- Συγκρίνετε το αποτέλεσμά σας με αυτό του τύπου (26).
- Από τον τύπο (27) υπολογίστε την μετατόπιση Goos-Hänchen.
- Σχολιάστε τα αποτελέσματά σας με βάση τα αποτελέσματά που βρήκατε στα προηγούμενα μέρη του πειράματος.

### Βιβλιογραφία

- F.L. Pedrotti & L.S. Pedrotti, Introduction to Optics, Prentice Hall International Editions, 1993, ch. 17
- E. Hecht, Optics, Addison-Wesley Publishing Company, 1987, ch. 10.27

## 10. ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΗΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ

### 1. Σκοπός

Στο πείραμα αυτό θα μετρήσετε την ταχύτητα του φωτός με την μέθοδο Foucault.

### 2. Θεωρία

#### Βασική προαπαιτούμενη γνώση

Serway, Physics for Scientists & Engineers, Τόμος ΙΙΙ, Κεφ.35.2 και τα αντίστοιχα προβλήματα.

#### 2.1 Εισαγωγή

Η ταχύτητα του φωτός στο κενό είναι μια πολύ σημαντική και ενδιαφέρουσα σταθερά στη φύση. Έχει παρατηρηθεί ότι, είτε το φως προέρχεται από ένα laser τοποθετημένο στο εργαστήριο, είτε από ένα άστρο που ταξιδεύει στο διάστημα με πολύ μεγάλες ταχύτητες, αν μετρήσουμε την ταχύτητα του φωτός που εκπέμπουν θα διαπιστώσουμε ότι αυτή είναι σταθερή και ανεξάρτητη της σχετικής κίνησης της πηγής και του παρατηρητή. Επί πλέον, όπως πρώτος ο *Einstein* παρουσίασε στη γνωστή "*Θεωρία της Σχετικότητας*", η ταχύτητα του φωτός είναι σημαντική και για τους εξής ακόμη λόγους:

- Η ταχύτητα του φωτός καθορίζει ένα ανώτατο όριο ταχύτητας για οποιοδήποτε κινούμενο αντικείμενο.
- Τα αντικείμενα που κινούνται με ταχύτητες κοντά στην ταχύτητα του φωτός ακολουθούν φυσικούς νόμους δραστικά διαφορετικούς, όχι μόνο από τους νόμους του Νεύτωνα αλλά και από την καθημερινή εμπειρία και αντίληψή μας.

Είναι επομένως κατανοητό γιατί οι επιστήμονες έχουν αφιερώσει πολύ χρόνο για να μετρήσουν την ταχύτητα του φωτός. Μερικές από τις πιο ακριβείς μετρήσεις έγιναν από τον *Michelson* μεταξύ του 1926 και 1929, που χρησιμοποίησε μεθόδους παρόμοιες με αυτή που θα χρησιμοποιηθεί στο εργαστήριο. Ο *Michelson* μέτρησε την ταχύτητα του φωτός στον αέρα και την βρήκε ίση με  $2.99712 \times 10^8 \text{ m/s}$ . Από αυτήν την τιμή υπολόγισε την ταχύτητα στο κενό την οποία βρήκε ίση με  $2.99796 \times 10^8 \text{ m/s}$ . Ο *Michelson* δεν ήταν ο πρώτος που προσπάθησε να μετρήσει την ταχύτητα του φωτός. Η εργασία του φυσικά στηρίχθηκε σε μια σειρά από βελτιώσεις της μεθοδολογίας και της τεχνολογίας προγενέστερων πειραμάτων.

#### 2.2 Μέτρηση της ταχύτητας του φωτός: ιστορική αναδρομή

##### *Galilei*

Δια μέσου της ιστορίας, οι λίγοι που ασχολήθηκαν με την ταχύτητα του φωτός, την θεώρησαν άπειρη. Ένας από τους πρώτους που αμφισβήτησαν την υπόθεση αυτή ήταν ο Ιταλός φυσικός *Galilei* ο οποίος μάλιστα πρότεινε μια μέθοδο μέτρησης της ταχύτητας του φωτός.

Η μέθοδος του *Galilei* ήταν απλή. Δύο άνθρωποι, έστω *A* και *B*, κρατώντας καλυμμένες λάμπες τοποθετούνται σε απόσταση περίπου 1 μιλίου. Ο *A* ανοίγει το σκέπαστρο της λάμπας του. Μόλις ο *B* παρατηρήσει το φως του *A* ανοίγει το σκέπαστρο της δικής του λάμπας. Μετρώντας το χρόνο που μεσολαβεί από το ξεσκέπασμα της λυχνίας του *A* μέχρι ο *A* να δει το φως του *B* και διαιρώντας αυτό το χρόνο με το διπλάσιο της απόστασης των *A* και *B* προσδιορίζουμε την ταχύτητα του φωτός.

Όμως, επειδή η ταχύτητα του φωτός είναι πολύ μεγάλη και επειδή ο χρόνος αντίδρασης του ανθρώπου είναι της τάξης δεκάτων του δευτερολέπτου ο *Galilei* κατόρθωσε μόνο να διαπιστώσει ότι η ταχύτητα είναι πολύ μεγάλη για να μετρηθεί με τη μέθοδο που πρότεινε. Όμως το πείραμα του έδωσε τη βάση για άλλα πειράματα αργότερα. Επίσης, εισήγαγε ένα σημαντικό σημείο: *ότι για να μετρήσεις μεγάλες ταχύτητες, η μέτρηση πρέπει να γίνει σε μεγάλη απόσταση.*

##### *Roemer*

Η πρώτη επιτυχής μέτρηση της ταχύτητας του φωτός έγινε από τον Δανό αστρονόμο *Olaf Roemer* το 1675. Ο *Roemer* στήριξε τη μέτρησή του στην παρατήρηση ενός από τους δορυφόρους του Δία. Καθώς ο δορυφόρος περιστρέφεται γύρω από το Δία, υπάρχει μια περίοδος χρόνου που ο Δίας βρίσκεται μεταξύ του δορυφόρου και της Γης και τον αποκρύπτει από τον γήινο παρατηρητή. Ο *Roemer* παρατήρησε ότι η

διάρκεια των εκλείψεων ήταν μικρότερη όταν η Γη κινείται προς τον Δία παρά όταν απομακρύνεται από αυτόν. Ο *Roemer* ορθώς απέδωσε τότε τη διαφορά αυτή στην πεπερασμένη ταχύτητα του φωτός.

Από τις παρατηρήσεις των εκλείψεων για διάστημα μερικών ετών, ο *Roemer* υπολόγισε την ταχύτητα σε  $2.1 \times 10^8 \text{ m/s}$ . Αυτή η τιμή είναι περίπου  $1/3$  μικρότερη από την ακριβή τιμή που γνωρίζουμε σήμερα. Αυτό οφείλεται στη μη ακριβή γνώση της απόστασης Γης-Διός την εποχή εκείνη. Η μέθοδος, όμως, του *Roemer* καθόρισε πέρα από κάθε αμφιβολία ότι η ταχύτητα του φωτός είναι πεπερασμένη.

### **Fizeau**

Ο Γάλλος επιστήμονας *Fizeau* το 1849 επινόησε μια έξυπνη μέθοδο μέτρησης της ταχύτητας του φωτός πάνω στη Γη. Χρησιμοποίησε ένα οδοντωτό τροχό περιστρεφόμενο γρήγορα μπροστά από μια φωτεινή πηγή, ώστε να μεταδώσει φως σε ένα κάτοπτρο τοποθετημένο σε μακρινή απόσταση, με μορφή παλμών. Τα κάτοπτρο αντανακλούσε το φως πίσω στον οδοντωτό κινούμενο τροχό. Το αν θα περάσει ή όχι το φως μέσα από το διάκενο του τροχού, ώστε να φθάσει σε ένα παρατηρητή πίσω από τον τροχό, εξαρτάται από τη θέση του οδόντος του τροχού.

Ο *Fizeau* μέτρησε την συχνότητα περιστροφής του τροχού που επέτρεπε την παρατήρηση του επιστρέφοντος παλμού, καθώς και την απόσταση τροχού και κατόπτρου, με ακρίβεια. Χρησιμοποιώντας αυτή τη μέθοδο βρήκε την ταχύτητα ίση με  $3.15 \times 10^8 \text{ m/s}$ , που είναι αρκετά κοντά στην ακριβή τιμή της ταχύτητας.

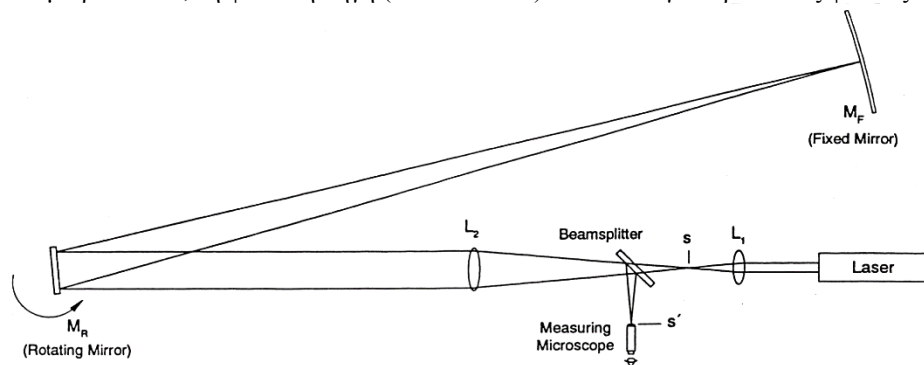
### **Foucault**

Ο *Foucault* βελτίωσε τη μέθοδο του *Fizeau* χρησιμοποιώντας ένα περιστρεφόμενο κάτοπτρο αντί για οδοντωτό τροχό. Επειδή αυτή η μέθοδος θα χρησιμοποιηθεί σ' αυτό το πείραμα, οι λεπτομέρειες της μεθόδου θα δοθούν παρακάτω. Ο *Michelson* χρησιμοποίησε τη μέθοδο *Foucault* για να μετρήσει την ταχύτητα του φωτός με αρκετή ακρίβεια. Η καλύτερη των μετρήσεων του έδωσε την τιμή  $2.99774 \times 10^8 \text{ m/s}$  που είναι συγκρίσιμη με την τιμή των  $2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s}$  που δεχόμαστε σήμερα.

## **2.3 Η μέθοδος Foucault**

### **2.3.1 Ποιοτική περιγραφή**

Στο πείραμα αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο *Foucault* που είναι βασικά ίδια με αυτή που αναπτύχθηκε το 1862. Ένα διάγραμμα του πειράματος φαίνεται στο Σχήμα 1. Η πειραματική διάταξη περιλαμβάνει ένα περιστρεφόμενο ( $M_R$ ) και ένα σταθερό ( $M_F$ ) κάτοπτρο, έναν διαχωριστή δέσμης (beam splitter), ένα μικροσκόπιο, τη φωτεινή πηγή (εδώ ένα laser) και δύο συγκεντρωτικούς φακούς  $L_1$  και  $L_2$ .



**Σχήμα 1.** Διάγραμμα της διάταξης της μεθόδου *Foucault*

Με την ευθυγράμμιση τελειωμένη και το περιστρεφόμενο κάτοπτρο ακίνητο, ο οπτικός δρόμος έχει ως εξής: Η παράλληλη δέσμη του φωτός από το laser εστιάζεται από το φακό  $L_1$  στο σημείο  $s$ . Ο φακός  $L_2$  τοποθετείται με τέτοιο τρόπο ώστε το φως να προσπίπτει στο κάτοπτρο  $M_R$  και από αυτό στο  $M_F$  και να επιστρέφει στο ίδιο σημείο  $s$ . Ο διαχωριστής δέσμης χρησιμοποιείται για να ανακλά την επιστρέφουσα δέσμη στο μικροσκόπιο της μέτρησης στο σημείο  $s'$ .

Υποθέστε τώρα ότι το κάτοπτρο  $M_R$  περιστρέφεται ελαφρά, έτσι ώστε η ανακλώμενη δέσμη να προσπέσει στο  $M_F$  σε διαφορετικό σημείο. Επειδή το  $M_F$  είναι σφαιρικό κάτοπτρο η δέσμη θα ανακλαστεί πίσω στο

$M_R$ . Το επιστρέφον είδωλο του σημείου της πηγής θα εμφανισθεί ξανά στα  $s$  και  $s'$ . Η μόνη σημαντική διαφορά λόγω μικρής περιστροφής του  $M_R$  είναι ότι το σημείο ανάκλασης πάνω στο  $M_F$  αλλάζει. Τώρα υποθέστε ότι το  $M_R$  περιστρέφεται με μεγάλη ταχύτητα. Στην περίπτωση αυτή το είδωλο της πηγής δεν θα εμφανισθεί πλέον στα σημεία  $s$  και  $s'$ . Αυτό θα συμβαίνει γιατί με την περιστροφή του  $M_R$ , ο παλμός του φωτός που διαδίδεται από το  $M_R$  στο  $M_F$  και πίσω στο  $M_R$  βρίσκει το  $M_R$  σε διαφορετική γωνία, όταν επιστρέφει, από αυτήν που ήταν όταν ανακλάστηκε για πρώτη φορά. Όπως θα δείξουμε στη συνέχεια η μέτρηση της μετατόπισης του ειδώλου που προκαλείται από τη περιστροφή του  $M_R$  συνδέεται με την ταχύτητα του φωτός.

### 2.3.2 Ποσοτική περιγραφή

Για να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο *Foucault* για τη μέτρηση της ταχύτητας του φωτός, είναι απαραίτητο να προσδιορίσουμε την ακριβή σχέση μεταξύ της ταχύτητας και της μετατόπισης του σημείου του ειδώλου. Βέβαια υπάρχουν και άλλοι παράμετροι που καθορίζουν στην πειραματική αυτή διάταξη την μετατόπιση του ειδώλου. Αυτές περιλαμβάνουν:

1. τον ρυθμό περιστροφής του  $M_R$
2. την απόσταση μεταξύ  $M_R$  και  $M_F$
3. την μεγέθυνση του  $L_2$  που εξαρτάται από την εστιακή απόσταση του  $L_2$  και επίσης από τις αποστάσεις μεταξύ  $L_2$ ,  $L_1$  και  $M_F$

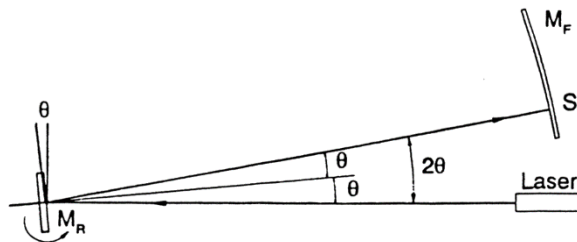
Κάθε μια από τις μεταβλητές που αναφέραμε εμφανίζεται στην τελική εξίσωση που αφορά την ταχύτητα του φωτός.

Κατ' αρχήν, ας θεωρήσουμε μια δέσμη laser, που ακολουθεί την πορεία που περιγράψαμε ποιοτικά παραπάνω. Δηλαδή, πρώτα η δέσμη εστιάζεται στο σημείο  $s$ , μετά ανακλάται από τα κάτοπτρα  $M_R$  και  $M_F$  και επιστρέφει στο  $M_R$ . Στη συνέχεια, η δέσμη επιστρέφει μέσω του διαχωριστή (beam splitter) και εστιάζεται στο σημείο  $s'$ , όπου μπορεί να παρατηρηθεί με το οπτικό μικροσκόπιο. Η δέσμη ανακλάται από ένα συγκεκριμένο σημείο του  $M_F$ . Πρώτα θα προσδιορίσουμε πώς το σημείο ανάκλασης σχετίζεται με τη γωνία περιστροφής του  $M_R$ .

Το Σχήμα 2(a) δείχνει την πορεία της δέσμης όταν το  $M_R$  σχηματίζει γωνία  $\theta$  με την κάθετο στην αρχική δέσμη. Σ' αυτή την περίπτωση η γωνία πρόσπτωσης στον  $M_R$  είναι επίσης ίση με  $\theta$ . Επίσης, η γωνία ανάκλασης ισούται με την γωνία πρόσπτωσης, συνεπώς, η γωνία μεταξύ της δέσμης πρόσπτωσης και της ανακλώμενης είναι  $2\theta$ . Το φως προσπίπτει στο  $M_F$  στο σημείο  $S$ .

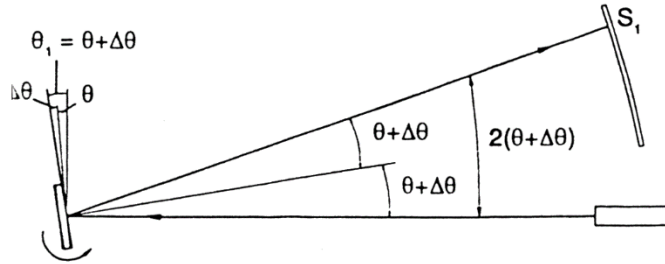
Το Σχήμα 2(b) δείχνει τον οπτικό δρόμο που ακολουθεί το φως που εξέρχεται από το laser, σε μία διαφορετική χρονική στιγμή, όταν το  $M_R$  βρίσκεται σε γωνία  $\theta_1 = \theta + \Delta\theta$ . Η γωνία πρόσπτωσης είναι τώρα  $\theta_1 = \theta + \Delta\theta$  και επομένως η γωνία μεταξύ της δέσμης πρόσπτωσης στο  $M_R$  και ανάκλασης από αυτό είναι  $2\theta_1 = 2(\theta + \Delta\theta)$ . Το σημείο που η δέσμη συναντά τώρα το  $M_F$  το ονομάζουμε  $S_1$ . Αν ορίσουμε ως  $D$  ( $D = 14.492 \pm 0.030 \text{m}$ ) την απόσταση μεταξύ  $M_F$  και  $M_R$  τότε, για μικρές γωνίες, η απόσταση μεταξύ  $S$  και  $S_1$  είναι:

$$\Delta S = S - S_1 = D(2\theta_1 - 2\theta) = D[2(\theta + \Delta\theta) - 2\theta] = 2D\Delta\theta \quad (1)$$



**Σχήμα 2(a).** Όταν το κάτοπτρο  $M_R$  είναι σε γωνία  $\theta$ , η δέσμη του laser ανακλάται στο σημείο  $S$  πάνω στο  $M_F$ .





**Σχήμα 2(b).** Όταν το κάτοπτρο  $M_R$  είναι σε γωνία  $\theta_1$ , η δέση του laser ανακλάται στο σημείο  $S_1$  πάνω στο  $M_F$ .

Στα επόμενα βήματα είναι χρήσιμο να θεωρούμε ότι το φως που εξέρχεται από το laser αποτελείται από μία ακολουθία μικρής χρονικής διάρκειας παλμών. Υποθέτουμε ότι το  $M_R$  περιστρέφεται και ένας παλμός laser φθάνει στο  $M_R$  όταν αυτό βρίσκεται στη γωνία  $\theta$  όπως φαίνεται στο Σχήμα 2(a). Ο παλμός ανακλάται και φθάνει στο σημείο  $S$  στο  $M_F$ . Όμως, όταν ο παλμός επιστρέφει στο  $M_R$  από το  $M_F$ , το περιστρεφόμενο κάτοπτρο θα έχει αλλάξει θέση και θα έχει έρθει σε γωνία  $\theta_1$ . Επειδή, το  $M_R$  έχει περιστραφεί, το φως, επιστρέφοντας, θα εστιάσθει τώρα σε ένα άλλο σημείο. Με άλλα λόγια η περιστροφή του  $M_R$  προκαλεί μετακίνηση του σημείου ανάκλασης πάνω στο κάτοπτρο  $M_F$  από τη θέση  $S$  στην  $S_1$ . Είναι δυνατόν να συσχετίσουμε την απόσταση ( $SS_1$ ) με αυτή των σημείων ( $ss_1$ ) χρησιμοποιώντας τα φανταστικά είδωλα του Σχήματος 3, αδιαφορώντας για την περιστροφή. Σύμφωνα με τη θεωρία των φακών και το Σχήμα 3 το  $\Delta S$  στο εστιακό επίπεδο του  $L_2$  θα εστιάζεται στο επίπεδο που περιέχει το  $s$  με ύψος  $(-i/o)\Delta S$ , όπου  $i$  και  $o$  είναι οι αποστάσεις του φακού από το είδωλο και το αντικείμενο. Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι το είδωλο είναι αντεστραμμένο ως προς το αντικείμενο. Όπως φαίνεται από το Σχήμα 3 ο διαιρέτης της δέσμης σχηματίζει ένα παρόμοιο είδωλο του ίδιου ύψους ( $\Delta S = \Delta S'$ ).

Αρα, αγνοώντας το αρνητικό πρόσημο γιατί δεν μας ενδιαφέρει η αντιστροφή του ειδώλου, έχουμε

$$\Delta s' = \Delta s = \left(\frac{i}{o}\right)\Delta S = \frac{A}{D+B}\Delta S \quad (2)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (1) και (2), και το ότι  $\Delta S = S_1 - S$ , έχουμε για το  $\Delta s'$  σε σχέση με την αλλαγή της γωνίας του  $M_R$  κατά  $\Delta\theta$  τη σχέση

$$\Delta s' = \frac{2DA\Delta\theta}{D+B} \quad (3)$$

Η γωνία  $\Delta\theta$  εξαρτάται από την ταχύτητα περιστροφής του  $M_R$  και το χρόνο που χρειάζεται ο παλμός του φωτός να διαδοθεί από το  $M_R$  στο  $M_F$  και πίσω στο  $M_R$ . Η απόσταση από το  $M_R$  στο  $M_F$  και πίσω που διανύει το φως είναι  $2D$ . Η εξίσωση που ισχύει είναι:

$$\Delta\theta = \frac{D\omega}{c} \quad (4)$$

όπου  $c$  είναι η ταχύτητα του φωτός και  $\omega$  η κυκλική ταχύτητα του  $M_R$  σε  $rad/sec$ . (Ο χρόνος που χρειάζεται το φως να διανύσει την απόσταση ( $M_R$ ,  $M_F$ ) και πίσω στο  $M_R$  είναι  $2D/c$ ).

Χρησιμοποιώντας την (4) για να αντικαταστήσουμε το  $\Delta\theta$  στην (3) έχουμε

$$\Delta s' = \frac{4AD^2\omega}{c(D+B)} \quad (5)$$

Από την (5) έχουμε για την ταχύτητα του φωτός  $c$  την τελική σχέση

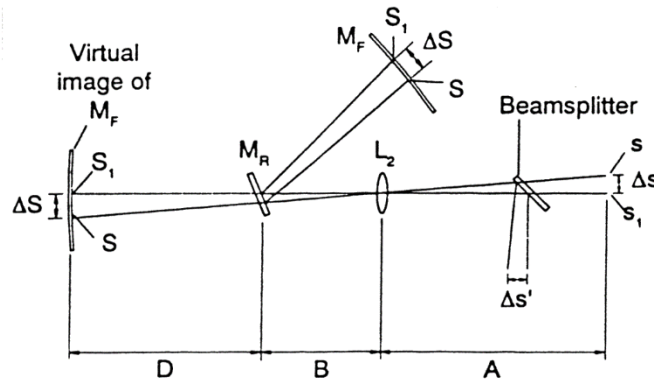
$$c = \frac{4AD^2\omega}{(D+B)\Delta s'} \quad (6)$$

όπου

- $c$ , η ταχύτητα του φωτός
- $\omega$ , η ταχύτητα περιστροφής ( $rads/sec$ )
- $A$ , η απόσταση ( $L_1, L_2$ ) –  $f_{L_1}$
- $B$ , η απόσταση ( $L_2, M_R$ )
- $D$ , απόσταση ( $M_R, M_F$ )

$\Delta s'$ , η απόσταση των ειδώλων των σημείων όπως φαίνονται μέσα από το μικροσκόπιο ( $\Delta s' = s_1 - s$ ).  
Το  $s$  αντιστοιχεί στο ακίνητο  $M_R$  και το  $s_1$  στο περιστρεφόμενο με γωνιακή ταχύτητα  $\omega$ , κάτοπτρο.

Η υπόθεση που κάναμε για την οπτική δέσμη, ότι αυτή αποτελείται από παλμούς φωτός δεν επηρεάζει την ανάλυση μας για μια πηγή συνεχούς που μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από μια σειρά από παλμούς πολύ μικρού εύρους.

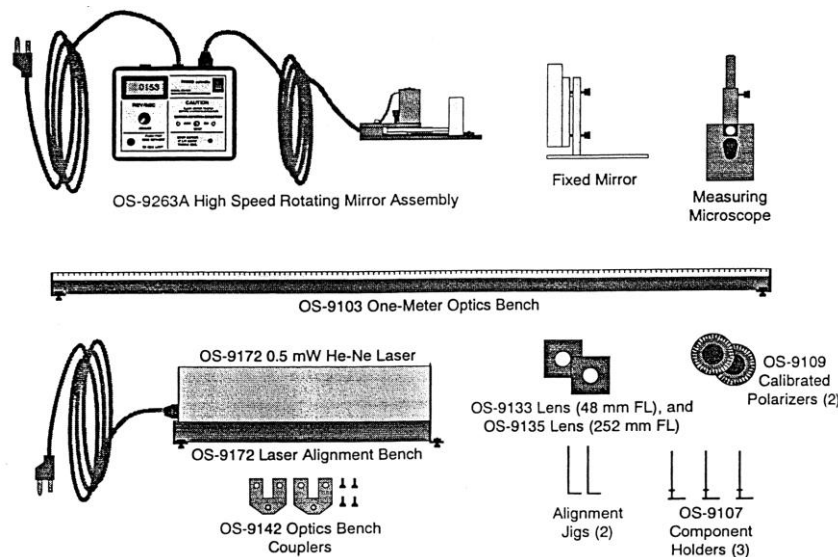


Σχήμα 3. Ανάλυση με την χρήση του φανταστικού ειδώλου

### 3. Η πειραματική διάταξη

Στο Σχήμα 4 φαίνονται τα διάφορα υποσυστήματα που χρειάζονται για να κάνουμε τη μέτρηση. Τα υποσυστήματα αυτά είναι:

- Ο οδηγός (ράγα) όπου τοποθετούνται τα διάφορα στοιχεία
- Το περιστρεφόμενο κάτοπτρο
- Το ακίνητο κάτοπτρο
- Το laser *He-Ne*
- Δύο πολωτές
- Δύο φακοί (lens OS-9133,9135) εστιακών αποστάσεων 48mm και 252mm αντίστοιχα
- Δύο βοηθητικές οπές για ευθυγράμμιση (alignment jigs)

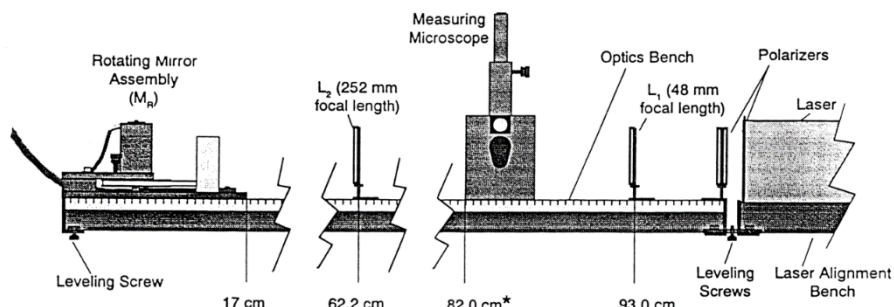


**Σχήμα 4.** Τα διάφορα υποσυστήματα της πειραματικής διάταξης.

## 4. Πειραματική εργασία

### 4.1 Περίληψη της ευθυγράμμισης

Κατ' αρχήν παρατηρήστε προσεκτικά το Σχήμα 5 για την κατά προσέγγιση τοποθέτηση των διαφόρων στοιχείων.



**Σχήμα 5.** Ευθυγράμμιση των διαφόρων στοιχείων της συσκευής του πειράματος

Η διαδικασία της ευθυγράμμισης έχει ως εξής:

1. Ευθυγραμμίστε τη δέσμη του laser ώστε να προσπίπτει στο κέντρο του περιστρεφόμενου κατόπτρου  $M_R$  χρησιμοποιώντας τις βοηθητικές οπές ευθυγράμμισης.
2. Ρυθμίστε τον άξονα περιστροφής του  $M_R$  ώστε να είναι παράλληλος με τη δέσμη (δηλ. καθώς το  $M_R$  περιστρέφεται θα πρέπει να υπάρχει μια θέση όπου η δέσμη του laser επιστρέφει στην οπή εξόδου του laser).
3. Τοποθετήστε το φακό  $L_1$  για να εστιάσετε το laser σε ένα σημείο. Ρυθμίστε τον  $L_1$  ώστε η δέσμη να είναι ξανά στο κέντρο του  $M_R$ .
4. Τοποθετήστε το φακό  $L_2$  και ρυθμίστε τον ώστε να έχουμε τη δέσμη ξανά στο κέντρο του  $M_R$ .
5. Τοποθετήστε το μικροσκόπιο μέτρησης και βεβαιωθείτε ότι η δέσμη είναι ξανά στο κέντρο του  $M_R$ .

**Προσοχή:** Μην κοιτάξετε μέσα στο μικροσκόπιο μέχρι να τοποθετηθούν οι πολωτές μεταξύ του laser και του διαιρέτη της δέσμης.

6. Τοποθετήστε το κάτοπτρο  $M_F$  στην επιλεγμένη απόσταση από το  $M_R$  έτσι ώστε η δέσμη να προσπίπτει στο κέντρο του  $M_F$ .
7. Ρυθμίστε τη θέση του  $L_2$  για να εστιασθεί η δέσμη σε ένα σημείο επί του  $M_F$ .
8. Ρυθμίστε το  $M_F$  ώστε η δέσμη να ανακλάται κατευθειάν πίσω στο  $M_R$ .
9. Τοποθετήστε του πολωτές μεταξύ του laser και του διαιρέτη της δέσμης, για να ρυθμίζετε την ένταση της δέσμης.
10. Εστιάστε το μικροσκόπιο στο σημείο του ειδώλου.
11. Αφαιρέστε τους πολωτές.

**Υποδείξεις για την ευθυγράμμιση.**

Όταν έχετε το μικροσκόπιο σε ευθυγράμμιση είναι ακόμα δύσκολο να έχετε ένα σημειακό είδωλο. Ίσως να υπάρχουν διάφορα άλλα σημεία ορατά με το μικροσκόπιο εκτός από το σημείο που προέρχεται από το  $M_F$ . Η πιο κοινή παρουσία σημείων προέρχεται από ανακλάσεις των φακών και μπορείτε να τα αγνοήσετε. Αν χρειαστεί στρέψτε τους φακούς ελάχιστα ( $1^\circ$ - $2^\circ$ ) για να τα αποφύγετε. Επίσης, οι ανακλάσεις από τα παράθυρα της κατασκευής που περιέχει το περιστρεφόμενο κάτοπτρο  $M_R$  εμφανίζονται στο οπτικό πεδίο του μικροσκοπίου. Αν αποκόψετε τη δέσμη που πηγαίνει στο  $M_F$  θα διαπιστώσετε ποιο είναι το σημείο που ενδιαφέρει. Αν το σημείο που μας ενδιαφέρει είναι εκτός κέντρου ρυθμίστε το διαχωριστή της δέσμης (beam splitter).

Αν το είδωλο εμφανίζεται σαν γραμμή, βεβαιωθείτε ότι αυτό είναι πράγματι το είδωλο και μετά στρίψτε ελαφρά το  $L_2$  ώστε να πάρετε σημείο.

Όταν το  $M_R$  αρχίζει να περιστρέφεται, είναι ασφαλές να παρατηρούμε μέσα στο μικροσκόπιο χωρίς τους πολωτές. Τότε θα παρατηρήσετε ότι το πεδίο τώρα περιλαμβάνει ένα τυχαίο σχέδιο συμβολής και μια

φωτεινή ζώνη στο κέντρο του πεδίου. Η ζώνη είναι το είδωλο του laser όταν για κάθε περιστροφή το φως επιστρέφει στην αρχική του θέση στο οπτικό πεδίο μέσω του διαχωριστή δέσμης. Αυτό είναι επίσης αναπόφευκτο.

Αν έχετε πετύχει εξαιρετική ευθυγράμμιση, τότε το σημείο που μας ενδιαφέρει θα είναι εντός της ζώνης που αναφέραμε πιο πάνω. Βεβαιωθείτε ότι έχετε το σημείο με τον  $M_R$  ακίνητο. Αν αυτό ισχύει τότε μετακινήστε ελαφρά το  $M_F$  ( $0.004^\circ$  ή λιγότερο) γύρω από τον οριζόντιο άξονα. Αυτό θα φέρει το σημείο έξω από τη ζώνη που αναφέραμε.

## 4.2 Μέτρηση της ταχύτητας του φωτός

Η μέτρηση γίνεται με το να περιστρέφουμε το  $M_R$  με μεγάλη ταχύτητα και με το να μετρήσουμε την μετατόπιση του σημείου (ειδώλου) με το μικροσκόπιο. Περιστρέφουμε το κάτοπτρο διαδοχικά σε αντίθετες κατευθύνσεις ώστε η ολική μετατόπιση να διπλασιάζεται, οπότε διπλασιάζεται και η ακρίβεια της μέτρησης.

### Προσοχή:

- Πριν ξεκινήσετε την περιστροφή του  $M_R$  βεβαιωθείτε ότι η βίδα ασφάλισης είναι τελείως χαλαρή ώστε το κάτοπτρο να περιστρέφεται με το χέρι σας.
- Όταν η ταχύτητα περιστροφής δεν έχει σταθεροποιηθεί, τότε είναι αναμμένο ένα κόκκινο LED (light emitting diode) στην πρόσοψη του κινητήρα. Όταν η ταχύτητα σταθεροποιηθεί το LED θα σβήσει. Αν δεν συμβεί αυτό, αποσυνδέστε τον κινητήρα από την παροχή ρεύματος και βεβαιωθείτε ότι η βίδα είναι τελείως χαλαρή.
- Ποτέ μην ενεργοποιείτε τον διακόπτη  $MAX\ REV/SEC$  περισσότερο από ένα λεπτό κάθε φορά και σε χρονικά διαστήματα που να απέχουν λιγότερο από ένα λεπτό από το προηγούμενο σταμάτημα. Ο κινητήρας χρειάζεται να ψυχθεί στο διάστημα που δεν εργάζεται.

### Διαδικασία της μέτρησης.

1. Με τη συσκευή ευθυγραμμισμένη και το είδωλο της δέσμης εστιασμένο, βάλτε τον διακόπτη κατεύθυνσης στο τροφοδοτικό του κινητήρα περιστροφής στο  $CW$  (clock wise) και ξεκινήστε τον κινητήρα. Αν το είδωλο δεν ήταν καλά εστιασμένο στο μικροσκόπιο ρυθμίστε το μικροσκόπιο. Μπορεί να χρειασθεί επίσης να ρυθμίσετε το  $L_2$  ελαφρά ( $1^\circ-2^\circ$ ) για να βελτιώσετε το είδωλο. Ίσως χρειασθεί να ρυθμίσετε το  $L_2$  και το μικροσκόπιο αρκετές φορές για να επιτύχετε πολύ καλό είδωλο. Αφήστε τον κινητήρα να ζεσταθεί στις 600 περιστροφές/sec για 3 τουλάχιστον λεπτά.
2. Αυξήστε αργά τις στροφές και παρατηρήστε την αύξηση της απόκλισης της δέσμης.
3. Χρησιμοποιήστε το ρυθμιστή  $ADJUST$  για να αυξήσετε την ταχύτητα στις 1000 στροφές/sec. Μετά πατήστε το  $MAX\ REV/SEC$  και κρατήστε το πατημένο. Όταν η ταχύτητα σταθεροποιηθεί μετρήστε με το σταυρόνημα του μικροσκοπίου την απόκλιση και γράψτε την ταχύτητα περιστροφής που δείχνει το όργανο. Σταματήστε τον κινητήρα και βρείτε τη θέση του ειδώλου με το μικρόμετρο του μικροσκοπίου. **Σημείωση:** Φροντίστε ώστε όλες οι μετρήσεις που αφορούν μικρόμετρα να γίνονται προς την ίδια κατεύθυνση για να αποφεύγεται ο τζόγος (backlash).
4. Αντιστρέψτε την κατεύθυνση της περιστροφής του κινητήρα του  $M_R$  θέτοντας τον διακόπτη στο  $CCW$  (counter clockwise). Επιτρέψτε στον κινητήρα να ακινητοποιηθεί πριν αλλάξετε κατεύθυνση περιστροφής. Επαναλάβετε την μέτρηση που περιγράψαμε στο βήμα 3. **Σημείωση:** Όταν ο κινητήρας γυρίζει με 1000 στροφές/sec ή περισσότερο, το σημείο ειδώλο διευρύνεται κατά την κατεύθυνση της μετατόπισης. Βάλτε τότε το σταυρόνημα στο κέντρο της κηλίδας. Υπενθυμίζουμε ότι το μικρόμετρο στο μικροσκόπιο είναι βαθμονομημένο σε υποδιαιρέσεις του 0.01mm (10μm).
5. Η επόμενη εξίσωση αποδείχθηκε στην παράγραφο 3:

$$c = \frac{4AD^2\omega}{(D+B)\Delta s}$$

Όταν τροποποιηθεί για να περιλάβει τις παραμέτρους που έχουν μετρηθεί, γίνεται:

$$c = \frac{8\pi AD^2 \left[ (\text{στροφές})_{CW} + (\text{στροφές})_{CCW} \right]}{(D+B)(s'_{CW} - s'_{CCW})}$$

Χρησιμοποιήστε αυτή την εξίσωση μαζί με το Σχήμα 1 για να υπολογίσετε το  $c$ , την ταχύτητα του φωτός. (Για να μετρήσετε το  $A$  μετρήστε την απόσταση ( $L_1, L_2$ ) και αφαιρέστε την εστιακή απόσταση του  $L_1$  που είναι 48mm).

6. Συγκρίνετε την ταχύτητα που βρήκατε με την αποδεκτή ταχύτητα που γνωρίζετε. Σχολιάστε τα σφάλματα των μετρήσεων. [Η εστιακή απόσταση του  $M_F$  είναι 13.5m και η βέλτιστη απόσταση ( $M_R, M_F$ ) είναι από 10 - 15m για ακρίβεια μέχρι 5%].
7. Η σημερινή τεχνολογία παρέχει ανιχνευτές παλμών με ταχύτητα απόκρισης της τάξης των 10ps και υπάρχουν παλμοί laser της τάξης των 10fs. Σχεδιάστε ένα πείραμα μέτρησης της ταχύτητας του φωτός και σχολιάστε την ακρίβεια που αναμένετε.

